



системи регулювання в середовищі Simulink, адже якщо не дотримуватись даних рекомендацій, система регулювання не буде працювати з достатньою ефективністю та буде збільшуватись час регулювання.

#### Список використаних джерел

- [1] Демченко В.А. Автоматичні системи регулювання технологічними процесами АЕС і ТЕС. Одеса: Астропринт, 2001. 305 с.
- [2] Кулаков Г.Т., Кулаков А.Т., Кухоренко А.Н. Математическое моделирование переходных процессов трехимпульсной системы автоматического регулирования питания водой парогенератора на сброс нагрузки // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. – 2014. – № 1. – С. 57-64.
- [3] Михайленко В.С., Харченко Р.Ю. Синтез нейромережевої системи автоматичного регулювання рівня води в барабані котла енергоблоку ТЕС // Наукові вісти НТУУ «КПІ». – 2012. – № 5. – С. 45-51.
- [4] Жукова Н.В., Сухарева Т.Н., Исследование САР уровня воды в ПГ // Донецкий национальный технический университет. – 2011. – № 1. – с.8-10

#### References

- [1] V.A. Demchenko, Automatic control systems and technological processes NPP and TPS. Odesa: Astroprint, 2001, 305 p.
- [2] G. T. Kulakov et al., “Matematicheskoe modelirovanie perekhodnyh processov trekhimpul'snoj sistemy avtomaticheskogo regulirovaniya pitaniya vodoj parogeneratora na sbros nagruzki,” *Energy. Proceedings of higher educational institutions and energy associations of the CIS*, no. 1, pp. 57-64, 2014.
- [3] V.S. Mihajlenko et al., “Sintez nejromerezhevoyi sistemi avtomatichnogo reguluyannya rivnya vodi v barabani kotla energobloku TES,” *Scientific news of NTUU "KPI"*, no. 5, pp. 45-51, 2012.
- [4] N.V. ZHukova et al., “Issledovanie SAR urovnya vody v PG,” *Donetsk National Technical University*, no. 1, pp. 8-10, 2011.

Отримана в редакції 22.01.2021. Прийнята до друку 24.02.2021. Received 22 January 2021. Approved 24 February 2021. Available in Internet 31 March 2021.

УДК 620.178.7–021.412.1:622.24.051.4

## ЧИСЛОВИЙ МЕТОД ОБЧИСЛЕННЯ КРИТИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ДОЛОТО ПРИ БУРІННІ СВЕРДЛОВИН

Горбійчук М. І.<sup>1</sup>, Кропивницький Д. Р.<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, м. Івано-Франківськ, Україна  
ORCID: <sup>1</sup> <https://orcid.org/0000-0002-8586-1883>, <sup>2</sup> <https://orcid.org/0000-0003-1896-9322>  
E-mail: <sup>1</sup> [gorb@nung.edu.ua](mailto:gorb@nung.edu.ua)

Copyright © 2021 by author and the journal “Automation of technological and business – processes”.  
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).  
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>



DOI:

**Анотація.** В роботі розглядається вплив осьового навантаження на долото на форму бурової колони. Визначено, що збільшення даного параметру до критичного значення приведе до деформації бурової колони, що в свою чергу може спричинити аварійну ситуацію. Для визначення критичного значення осьового навантаження було побудовано багатокутник сил, що діють на нижньому кінці бурильної колони, що визначається координатою  $x_2$ , що є точкою максимального прогину бурильної колони, та побудовано математичні залежності у вигляді системи диференціальних рівнянь (форма Коші). В середовищі MatLab було розроблено алгоритм визначення заданої координати  $x$ , який включає в себе розв'язок системи диференціальних рівнянь методом Рунге-Кутта та побудову



інтерполяційного поліному Лагранжа. Побудовано графічні залежності зміни прогину бурильної колони при різних значеннях згинаючого моменту.

За результатами обчислень синтезовано емпіричні моделі визначення точки максимального прогину бурильної колони у вигляді полінома 2-го порядку, параметри яких обчислено за методом найменших квадратів. Адекватність моделей перевірено за допомогою коефіцієнта кореляції. Обчислені значення коефіцієнта кореляції є близькими до одиниці, тому можна стверджувати, що запропонована емпірична модель адекватно описує «експериментальні» дані.

Було проведено серію машинних експериментів при різних значеннях максимальної степені полінома і визначено, що при степені полінома рівній 3, емпірична модель, яка є функцією  $f(a, x)$  з високою точністю описує результати даних.

**Abstract.** The article considers the influence of axial load on the bit on the shape of the drill string. It is determined that increasing this parameter to a critical value will lead to deformation of the drill string, which in turn can lead to an accident. To determine the critical value of the axial load, was constructed a polygon of forces that acts at the lower end of the drill string, it can be found by a coordinate  $x_2$  that is exact of the maximum deflection of the drill string, and mathematical dependences were constructed in the form of a system of differential equations (Cauchy form). An algorithm for determining a given  $x$  coordinate was developed in the MatLab environment, which includes the solution of a system of differential equations by the Runge-Kutta method and the construction of an interpolation Lagrange polynomial. Graphical dependences of the change in the deflection of the drill string at different values of the bending moment are constructed. Based on the results of calculations, empirical models for determining the point of maximum deflection of a drill string in the form of a polynomial of the 2nd order were synthesized, the parameters of which were calculated by the method of least squares. The adequacy of the models was checked using a correlation coefficient. The calculated values of the correlation coefficient are close to unity, so it can be argued that the proposed empirical model adequately describes the "experimental" data. A series of machine experiments was performed at different values of the maximum degree of the polynomial and it was determined that for the degree of the polynomial equal to 3, the empirical model, which is a function of  $f(a, x)$ , describes the data results with high accuracy.

**Ключові слова:** навантаження на долото, бурильна колона, метод Рунге-Кутта, метод найменших квадратів, емпірична модель.

**Keywords:** bit load, drill string, Runge-Kutta method, least squares method, empirical model.

## Вступ

Буріння нафтових і газових свердловин є складним процесом, який можна розділити на декілька етапів. Одним з найбільш енерговитратних етапів є процес поглиблення свердловини. На сьогоднішній день, в Україні реалізується програма глибокого буріння, довгостроковою метою якої є перехід на нові глибинні горизонти понад 7 тис. м, що є значним внеском у досягненні енергетичної безпеки України. При цьому, головним фактором, який впливає на покращення техніко-економічних показників процесу поглиблення нафтових і газових свердловин є визначення оптимальних параметрів режиму буріння – частоти обертання та осьового навантаження на долото.

## Мета роботи

Метою роботи є знаходження критичного значення осьового навантаження на долото, яке діє на низ бурильної колони і є одним з параметрів, який впливає на її напружено-деформований стан.

## Викладення основного матеріалу

Розв'язування задачі оптимального керування вимагає знання обмежень на керуючі впливи. При роторному способі буріння – це частота обертання ротора і осьове навантаження на долото. Граничне значення частоти обертання ротора елеватора зумовлене його енергетичною характеристикою.

Осьове навантаження на долото визначається [1] як різниця між зусиллям на кроку  $G_h$  і вагою бурильної колони в рідині  $G_g$  з врахуванням сумарної сили тертя  $F_{fy}$  бурильної колони об стінки свердловини

$$G = G_h - G_g + F_{fy} \quad (1)$$

Оскільки верхня частина бурильної колони утримується тальновою системою, а її нижня частина упирається об вибій свердловини, то існує нейтральний переріз [2], де не має ні стиску, ні розтягу. Положення такого перерізу змінюється під впливом гідростатичного тиску, що створюється буровим насосом.

Якщо знехтувати силою тертя, то із формули (1) випливає, що вага в промивній рідині частини бурильної колони, яка розміщена нижче нейтрального січення, створює навантаження на долото.

До певного критичного значення осьового навантаження на долото бурильна колона зберігає свою початкову форму. Збільшення осьового навантаження на долото приводить до згинання бурової колони і при певному значенні осьового навантаження на долото вона доторкнеться до стінки свердловини (рис. 1).

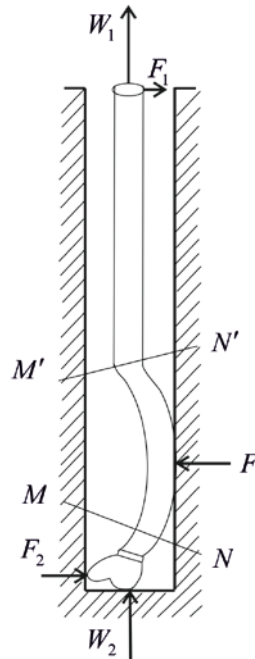


Рисунок 1 – Схематичне зображення свердловини при критичному осьовому навантаженні на долото

На рис. 1 прийняті такі позначення:  $W_1$ ,  $F_1$  - вертикальна і горизонтальна реакції елеватора;  $W_2$  - вертикальна складова реакції вибою свердловини або навантаження на долото;  $F$  - горизонтальна реакція стінки свердловини;  $F_2$  - горизонтальна складова реакції вибою.

Виберемо таку систему координат. Вісь  $X$  направимо вниз в сторону вибою свердловини. Її початок розмістимо в точці  $O$  нейтрального перерізу. Координату  $Y$ , яка характеризує відхилення осі колони від свого недеформованого стану, направимо горизонтально від точки  $O$  зліва направо.

Для визначення критичного осьового навантаження на долото (рис. 2,а) складемо багатокутник сил [2], які діють на частину колони, що розміщена нижче перерізу  $MN$  (рис.1).

Прогин колони відбувається під дією сили зсуву  $F_{sf}$ , яка виникає внаслідок дії згинаючого моменту  $M_{bm}$ . Між силою зсуву  $F_{sf}$  і згинаючим моментом існує таке співвідношення [3]:

$$F_{sf} = \frac{dM_{bm}}{dX} \quad (2)$$

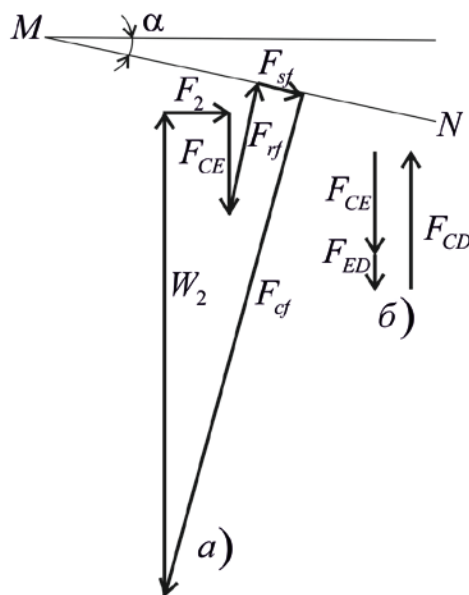


Рисунок 2 – Багатокутник сил, що прикладені до колони нижче січення  $MN$



Величина згинаючого моменту зумовлена жорсткістю колони і обчислюється за такою формулою:

$$M_{bm} = EJ \frac{d^2 Y}{dX^2}, \quad (3)$$

де  $E$  - модуль Юнга для матеріалу колони бурильних труб;  $J$  - момент інерції поперечного перерізу труби.

Сила  $F_{CE}$  є векторною сумою сил (рис. 2, б)  $F_{ED}$  і  $F_{CD}$ . Отже,

$$F_{CE} = F_{CD} - F_{ED}, \quad (4)$$

де  $F_{CD}$  - вага частини колони, що розміщена нижче перерізу  $MN$ ;  $F_{ED}$  - вага рідини, що витіснена частиною колони, яка розміщена нижче перерізу  $MN$ .

Силу  $F_{CE}$  визначимо як вагу частини колони, яка розміщена нижче перерізу  $MN$ , помножену на коефіцієнт  $k_G$ . Оскільки  $F_{CD} = V\rho_s g$ ,  $F_{ED} = V\rho_a g$  і  $F_{CE} = k_G V\rho_s g$ , де  $V$  - об'єм частини труби нижче перерізу  $MN$ ;  $\rho_s$  і  $\rho_a$  - густини матеріалу труби і промивальної рідини, то рівняння (4) наб'уде такого вигляду:

$$k_G V\rho_s g = V\rho_s g - V\rho_a g.$$

Звідси

$$k_G = 1 - \frac{\rho_a}{\rho_s}.$$

Сила виштовхування  $F_{rf}$  перпендикулярна перерізу  $MN$  [2].

Складемо векторне рівняння (рис. 2, а)

$$W_2 + F_2 + F_{CE} + F_{rf} + F_{st} + F_{cf} = 0. \quad (5)$$

Вектори, що є складовими рівняння (5), споектуємо на лінію  $MN$  (рис. 2, а), прийнявши за додатний напрямок від точки  $M$  до точки  $N$ . У результаті приходимо до такого скалярного рівняння:

$$F_{st} + (W_2 - F_{CE})\sin\alpha + F_2\cos\alpha = 0. \quad (6)$$

Зауважимо, що в (6) значення кута  $\alpha$  відраховуємо за годинниковою стрілкою. Тому  $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ , що і зумовлює кінцевий вигляд формули (6).

У реальних умовах буріння кут  $\alpha$  є досить малим. Тому мають місце такі співвідношення:  $\cos\alpha \approx 1$  і  $\sin\alpha \approx \text{tg}\alpha$ . З врахуванням останніх співвідношень рівняння (6) набуде такого вигляду:

$$F_{st} + (W_2 - F_{CE})\text{tg}\alpha + F_2 = 0. \quad (7)$$

Позначимо через  $P$  вагу погонного метра колони в повітрі. Тоді вага погонного метра колони у рідині буде такою:

$$p_f = k_G P. \quad (8)$$

Визначимо координати точок початку  $X_1$  і кінця  $X_2$  бурильної колони (рис. 3)

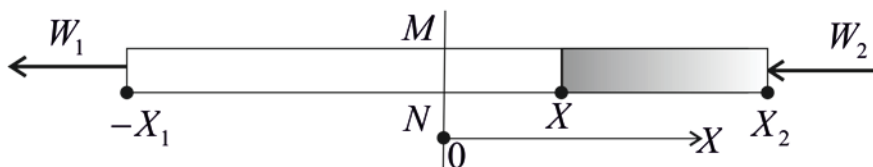


Рисунок 3 – Прив'язка координати  $X$  до нейтрального перерізу бурової колони

Очевидно, що

$$X_1 = -\frac{W_1}{p_f}, \quad X_2 = \frac{W_2}{p_f}.$$

Вагу колони, що розміщена нижче нейтрального перерізу  $X$  (рис. 3), обчислимо за такою формулою:

$$k_G W = p_f (X_2 - X),$$



де  $W$  – вага частини колони, що розміщена нижче нейтрального перерізу  $X$ , у повітрі. Оскільки

$$F_{CE} = k_G W, \text{ то}$$

$$F_{CE} = p_f (X_2 - X).$$

Значення  $F_{CE}$  підставимо в (7) і врахуємо, що  $W_2 = p_f X_2$ . Тоді

$$F_{st} + p_f X \operatorname{tg} \alpha + F_2 = 0.$$

Враховуючи те, що  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dY}{dX}$ , а із формул (2) і (3) випливає, що  $F_{st} = EJ \frac{d^3 Y}{dX^3}$ , то отримаємо таке диференціальне рівняння:

$$EJ \frac{d^3 Y}{dX^3} + p_f X \frac{dY}{dX} + F_2 = 0.$$

Перейдемо до безрозмірних величин:  $x = \frac{X}{m}$  і  $y = \frac{Y}{m}$ . Тоді

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{p_f m^3}{EJ} x \frac{dy}{dx} + \frac{m^2}{EJ} F_2 = 0. \quad (9)$$

Значення виберемо таким, щоб  $\frac{p_f m^3}{EJ} = 1$ . Звідси знаходимо, що  $m = \left( \frac{EJ}{p_f} \right)^{1/3}$ . Якщо тепер врахувати значення  $m$ , то  $\frac{m^2}{EJ} F_2 = \frac{F_2}{mp_f}$ . З врахуванням вибраного значення  $m$  диференціальне рівняння (9) набуде такого вигляду:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + x \frac{dy}{dx} + f_2 = 0, \quad (10)$$

де  $f_2 = \frac{F_2}{mp_f}$ .

Якщо  $p_f$  має розмірність  $[H/M]$ ; модуль Юнга  $E - [H/M^2]$ , а момент інерції  $J - [M^4]$ , то розмірність  $m - [M]$ .

Оскільки в рівняння (10) перший і другий доданки безрозмірні, то величина  $f_2$  також повинна бути безрозмірною величиною. Дійсно, якщо розмірність  $F_2 - [H]$ , а добуток  $mp_f$  має розмірність  $[H]$ , то  $f_2$  - безрозмірна величина.

У роботі [2] рівняння (10) розв'язано шляхом пониження порядку диференціального рівняння (10), ввівши нову змінну  $z = \frac{dy}{dx}$ . Отримане нелінійне диференціальне рівняння

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + xz + f_2 = 0,$$

розв'язано шляхом представлення функції  $z$  у вигляді нескінченного степеневого ряду змінної  $x$ . У результаті отримали сімейство розв'язків, кожен із яких виражається через функції Бесселя дробових порядків. Перехід від функції  $z$  до функції  $Y$  вимагає складних і громіздких обчислень. Тому кінцеві результати, які отримані внаслідок розв'язання рівняння (10), подані в роботі [4] не як аналітичні залежності, а у вигляді номограм, що звичайно знижує точність розв'язання цілого ряду практичних задач.

Оскільки метою роботи є знаходження критичного значення осьового навантаження на долото, яке визначається координатою  $x_2$ , то для розв'язання поставленої задачі скористаємося числовим методом [5].

Рівняння (10) подамо у вигляді системи диференціальних рівнянь, кожне із яких є диференціальним рівнянням першого порядку (система рівнянь у формі Коші)



$$\frac{dz_1}{dx} = z_2,$$

$$\frac{dz_2}{dx} = z_3,$$

$$\frac{dz_3}{dx} = -xz_2 - f_2,$$

$$y = z_1.$$

Для реалізації ітераційної процедури розв'язання рівняння (11) одним із числових методів, необхідно визначити початкові умови.

У точці нейтрального перерізу (рис. 2) відхилення вертикальної осі буриньної колони дорівнює нулю. Це означає, що  $y(0) = z_1(0) = 0$ .

Оскільки кут  $\alpha$  є досить малим, то  $\operatorname{tg}(\alpha) \approx 0$ . З іншої сторони  $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{dy}{dx} = z_2$ . Отже,

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = z_2(0) = 0.$$

Із рівняння (3) випливає, що

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} = \frac{M_{bm}}{EJ}.$$

Переходячи до безрозмірних одиниць, отримуємо

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = m \frac{M_{bm}}{EJ}.$$

Якщо врахувати значення  $m$ , то приходимо до такого виразу:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = m_{bm},$$

де  $m_{bm} = \frac{M_{bm}}{m^2 p_f}$  – згинаючий момент в безрозмірних одиницях.

$$\text{Оскільки } \frac{d^2 y}{dx^2} = z_3, \text{ то } z_3(0) = m_{bm}(0).$$

Диференціальне рівняння (10), яке подано у вигляді еквівалентної системи рівнянь (11), розв'яжемо методом Рунге-Кутта [5].

Для того, щоб скористатися методом Рунге-Кутта, систему диференціальних рівнянь (11) необхідно записати у матрично-векторній формі

$$\frac{d\bar{z}}{dx} = \bar{f}(x, \bar{z}), \quad (12)$$

$$\text{де } \bar{z} = (z_1, z_2, z_3)^T; \bar{f}(x, \bar{z}) = (z_2, z_3, -xz_2 - f_2)^T.$$

Початкові умови для рівняння (12) будуть такі:  $\bar{z}(0) = (0 \ 0 \ m_{bm}(0))^T$ .

Процес інтегрування системи рівнянь (11) закінчувався при виконанні умови  $y(x_k) \leq 0$ . Останнє співвідношення означає, що на інтервалі значень  $x \in [x_{k-1}; x_k]$  функція  $y(x)$  змінила свій знак на протилежний і при деякому значенні  $x_2$  виконується умова  $y(x_2) = 0$ .

У методі Рунге-Кутта інтегрування ведеться з постійним кроком  $h$ . Тому інтервал, який вміщує нуль функції  $y(x)$ , обчислюється за допомогою такого співвідношення:

$$\Delta = x_k - x_{k-1}.$$



Оскільки  $x_k = kh$  і  $x_{k-1} = (k-1)h$ , то  $\Delta = h$ . Якщо  $x_{k-1}$  взяти як значення  $x_2$ , то похибка у визначенні  $x_2$  буде не більше  $h/2$ .

Для уточнення значення  $x_2$ , що належить інтервалу  $\Delta$ , за трьома значеннями  $y(x_{k-2})$ ,  $y(x_{k-1})$  і  $y(x_k)$  побудуємо інтерполяційний поліном Лагранжа.

У випадку, коли інтерполяційні вузли розміщені на однаковій віддалі  $h$  один від одного, то інтерполяційний поліном синтезують за такою формулою:

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^N q_k \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^N (x/h - i)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^N (k - i)}. \quad (13)$$

Для практичного застосування формули (13) введемо такі позначення:  $q_0 = y(x_{k-2})$ ,  $q_1 = y(x_{k-1})$  і  $q_2 = y(x_k)$ . Тоді  $N = 2$ .

З врахуванням прийнятих позначень, поліном Лагранжа  $P_2(x)$  буде поліномом другого порядку. Значення  $x_2$  - це більший корінь квадратного рівняння  $P_2(x) = 0$ .

Розроблений алгоритм обчислення значення  $x_2$  ліг в основу програмного забезпечення, яке створене в середовищі MatLab.

Були вибрані такі значення: для крутного моменту -  $m_{bm}(0) \in [0, 20, 0, 25, 0, 30, 0, 35, 0, 40]$ ; реакція вибою -  $f_2 \in [0, 4, 0, 5, 0, 6, 0, 7]$ .

Як приклад, на рис. 4 показана зміна прогину труби  $y$  як функції координати  $x$  при  $f_2 = 0,4$  і при різних значеннях згинаючого моменту.

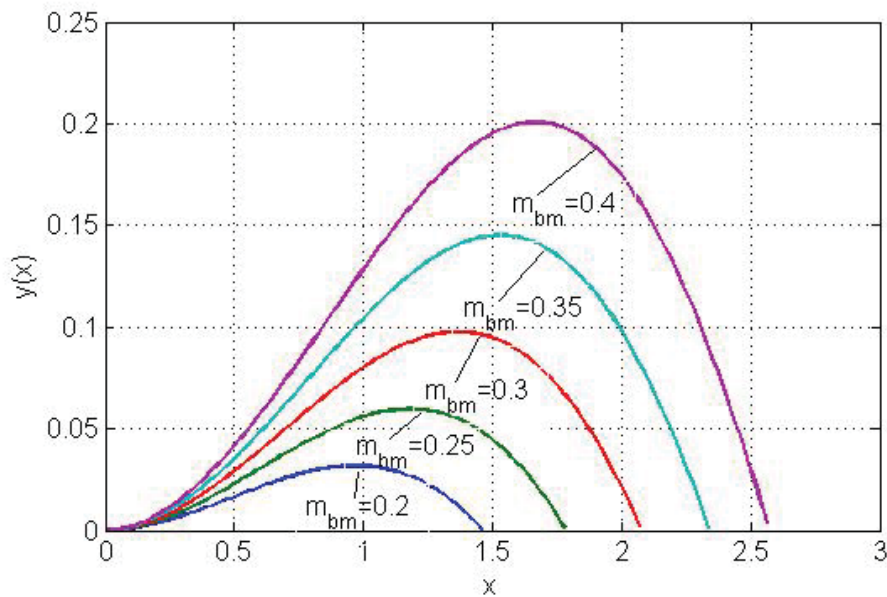


Рисунок 4 – Зміна прогину бурильної труби при різних значеннях згинаючого моменту

Аналіз рис. 4 показує, що зі збільшення осьового навантаження на долото зростає крутий момент, що зумовлює інтенсивність викривлення бурильної колони.

Критичне осьове навантаження на долото  $G_{ca}$  можна оцінити за значенням  $x_2$ . Якщо відома вага погонного метра труби  $P$  і значення  $k_G$ , то можна обчислити  $P_f = k_G P$ . Тоді  $G_{ca} = P_f x_2$ .

Для різних значень  $m_{bm}(0)$  і  $f_2$  були визначені значення  $x_2$  (рис. 5) як результат розв'язування рівняння  $P_2(x) = 0$ .

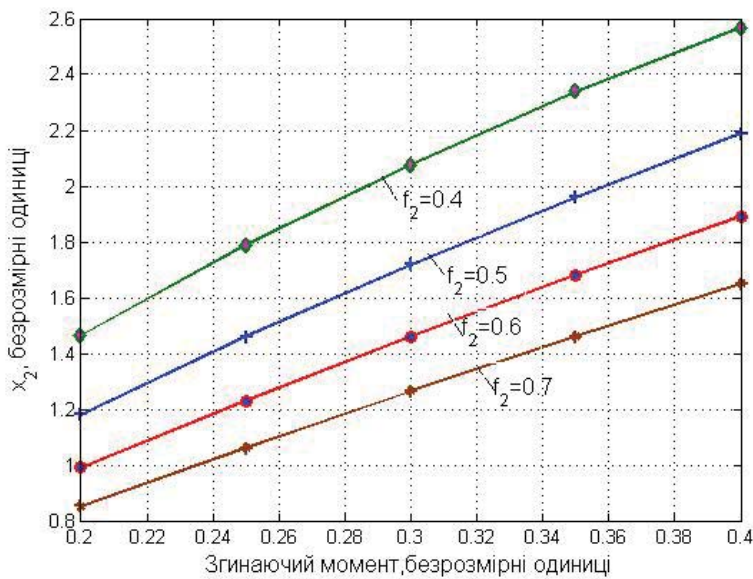


Рисунок 5 – Зміна значень  $x_2$  як функції величин  $m_{bm}(0)$  і  $f_2$

Іншою важливою характеристикою, крім значення  $x_2$ , і яка також визначає критичне осьове навантаження на долото є максимальне значення функції  $y = \varphi(x)$  на інтервалі значень  $x \in [0; x_2]$

$$x_3 = \max_{x \in [0; x_2]} \varphi(x).$$

Величину  $x_3$  обмежують величиною позірного радіуса  $r$

$$x_3 \leq r.$$

Значення  $r$  обчислюють за такою формулою:

$$r = \frac{D - D_t}{2m},$$

де  $D$  – діаметр свердловини;  $D_t$  – зовнішній діаметр нормальної (обтяженої) труби або замкового з'єднання.

У точці  $x_3$  функція  $\varphi(x)$  досягає свого максимального значення. Це означає що  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_3} = 0$ . Оскільки  $z_2 = \frac{dy}{dx}$ , то  $z_2(x_3) = 0$ . Отже, функція  $z_2(x)$  в точці  $x = x_3$  набуває нульового значення, а  $y$  – максимального значення (рис. 6).

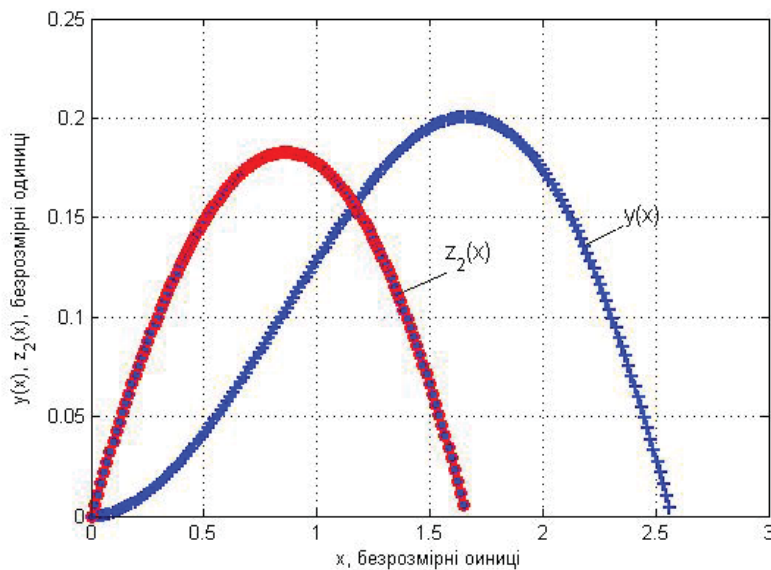


Рисунок 6 – Зміна функцій  $y(x)$  і  $z_2(x)$





Для уточнення значення  $x_3$ , при якому функція  $y(x)$  досягає свого максимального значення, визначалось значення  $x_k$  за умови, що  $z_2(x_k) < 0$  і за трьома значеннями  $y(x_{k-2})$ ,  $y(x_{k-1})$  і  $y(x_k)$  будувався поліном Лагранжа за формулою (13).

Оскільки у формулі (13)  $N = 2$ , то поліном Лагранжа матиме другий порядок

$$P_2(x) = a_{L,0} + a_{L,1}x + a_{L,2}x^2, \quad x \in [x_{k-2}; x_k].$$

Функція  $P_2(x)$  досягає свого максимуму за умови:  $x = -\frac{a_{L,1}}{2a_{L,2}}$ ,  $x \in [x_{k-2}; x_k]$ . Тоді

$$x_3 = x_{k-2} + x, \quad x \in [x_{k-2}; x_k].$$

Для значень  $m_{bm}(0) \in [0,20, 0,25, 0,30, 0,35, 0,40]$  і реакції вибою -  $f_2 \in [0,4, 0,5, 0,6, 0,7]$  побудовані  $x_3 = \eta(m_{bm}, f_2)$  (рис. 9).

За результатами обчислень, які відображені на рис. 6, і рис. 7 синтезовані такі емпіричні моделі:

$$\pi = a_0 + a_1 m_{bm} + a_2 f_2 + a_3 m_{bm} f_2 + a_4 m_{bm}^2 + a_5 f_2^2, \quad (14)$$

де  $\pi$  - одна із величин  $\hat{x}_2$  або  $\hat{x}_3$ .

Параметри моделі (14) обчислені за методом найменших квадратів, за такою формулою [6]:

$$\bar{a} = M^{-1} F^T \bar{\Pi}, \quad (15)$$

де  $\bar{a}$  - вектор параметрів моделі (14);  $M = F^T F$  - матриця Фішера;  $F$  - матриця, яка складена із функцій при відповідних коефіцієнтах і, які обчислені в «експериментальних» точках (результат розв'язання системи диференціальних рівнянь (11));  $\bar{\Pi}$  - вектор, компоненти якого «експериментальні» значення  $x_2$  або  $x_3$ .

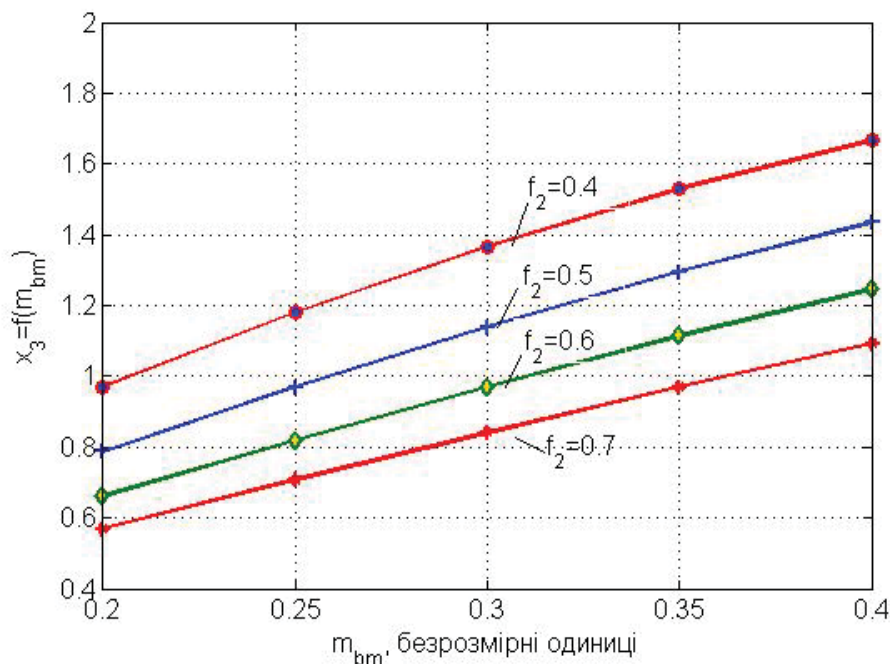


Рисунок 7 – Зміна величини прогину  $x_3$  як функції величин  $m_{bm}(0)$  і  $f_2$

Були отримані такі значення коефіцієнтів моделі (14):

- $\pi = \hat{x}_2$

$$a_0 = 1,6156, \quad a_1 = 9,5240, \quad a_2 = -5,29161, \quad a_3 = -5,1338, \quad a_4 = -3,2293, \quad a_5 = 3,8275.$$

- $\pi = \hat{x}_3$

$$a_0 = 1,0440, \quad a_1 = 6,2949, \quad a_2 = -3,2820, \quad a_3 = -2,8914, \quad a_4 = -2,7279, \quad a_5 = 2,2395.$$



Рис. 8 відображає результати побудови емпіричної моделі (14).

Адекватність моделей, які представлені формулою (14) перевірялась за допомогою коефіцієнта кореляції  $K_{xx}$  між «дійсними» значеннями  $x_2^{(i)}$  або  $x_3^{(i)}$  та значеннями  $\hat{x}_2^{(i)}$  або  $\hat{x}_3^{(i)}$ , які обчислені за формулою (14)

$$K_{xx} = \frac{\sum_{i=1}^N (\Pi^{(i)} - \text{mean}(\Pi^{(i)})) (\pi^{(i)} - \text{mean}(\pi^{(i)}))}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\Pi^{(i)} - \text{mean}(\Pi^{(i)}))^2 \sum_{i=1}^N (\pi^{(i)} - \text{mean}(\pi^{(i)}))^2}}, \quad (16)$$

де  $\text{mean}(\Pi^{(i)}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Pi^{(i)}$ ,  $\text{mean}(\pi^{(i)}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \pi^{(i)}$  - оцінки математичних сподівань для величин  $x_2^{(i)}$  і  $\hat{x}_2^{(i)}$  або  $x_3^{(i)}$  і  $\hat{x}_3^{(i)}$ .

За допомогою програмного забезпечення, розробленого в середовищі MatLab, за формулою (16) обчислено значення коефіцієнтів кореляції: для  $\pi = x_2$   $K_{xx} = 0,9998$  і для  $\pi = x_3$   $K_{xx} = 0,9997$ . Оскільки значення  $K_{xx}$  близьке до одиниці, то є всі підстави стверджувати, що емпірична модель (14) адекватно описує «експериментальні» дані.

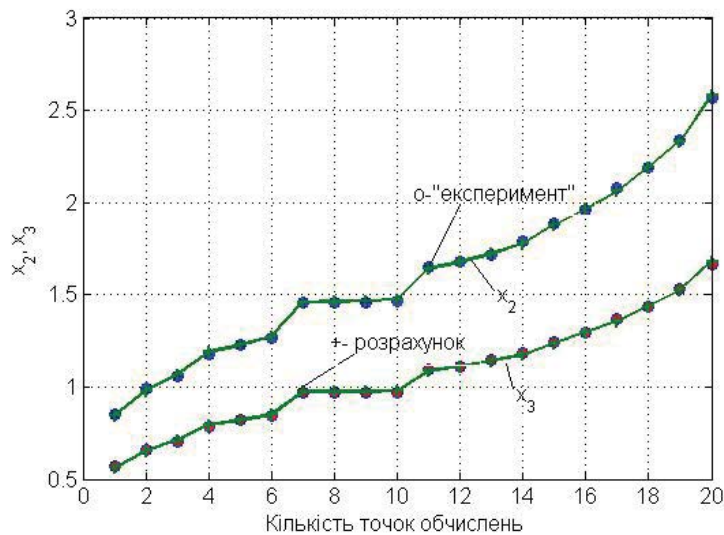


Рисунок 8 – Залежність між розрахунковими і «експериментальними» даними

На рис. 9 показаний графіки залежностей  $\hat{x}_2$  і  $\hat{x}_3$ , який побудований з використанням моделі (14).

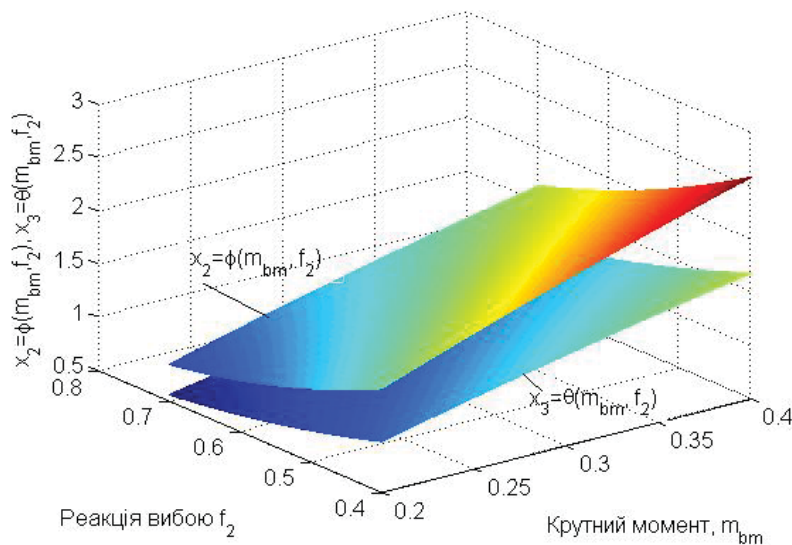


Рисунок 9 – Залежність значень  $x_2$  і  $x_3$  як функції величин  $m_{bm}$  і  $f_2$



За допомогою методу найменших квадратів (МНК) результати обчислень, які отримані як розв'язок системи диференціальних рівнянь (11), апроксимуємо поліномом степені  $r$  [7]

$$y(\bar{a}, \bar{x}) = \sum_{i=0}^{L-1} a_i \prod_{j=1}^n x_j^{\varphi_{ij}}, \quad (17)$$

де  $\bar{a}$  – вектор коефіцієнтів емпіричної моделі (17) з компонентами  $a_i, i = \overline{0, L-1}$ ;  $\bar{x} = (m_{bm}, f_2, x)^T$  – фактори моделі (17) (прийняті такі позначення:  $x_1 = m_{bm}, x_2 = f_2$  і  $x_3 = x$ );  $n$  – кількість факторів моделі;  $\varphi_{ij}$  – степені аргументів  $x_j$  приймають значення 0, 1, 2, ..., і задовольняють обмеженню  $\sum_{j=1}^n \varphi_{ij} \leq r$ ;  $r$  – максимальна степінь полінома (17).

Число членів емпіричної моделі (17) визначається за такою формулою [8]:

$$L = \frac{(r+n)!}{r!n!}.$$

Серія машинних експериментів показала, що при  $r=3$  емпірична модель (17) з високою точністю описує результати даних, які отримані як розв'язок системи диференціальних рівнянь (11). Оскільки  $n=3$ , то число членів полінома (17) -  $L=20$ .

Для значень  $m_{bm}(0) \in (0,2; 0,25; 0,3; 0,35; 0,4; 0,45; 0,5)$  і  $f_2 \in (0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7)$  обчислювались значення  $y_j$ , як розв'язок системи диференціальних рівнянь за таким алгоритмом.

Для чергового значення  $f_2^{(i)}$  із множини  $f_2$  обчислювались величини  $y_j$  для всіх значень  $m_{bm}^{(j)}(0)$ , що визначені множиною  $m_{bm}(0)$ . У результаті отримали вектор  $\bar{Y}_f$  розмірністю  $R = \sum_{j=1}^{N_m} R_j$ , де  $R_j$  – кількість значень  $y_j, i = \overline{1, R_j}$ , якщо  $f_2 = f_2^{(i)}$ , а  $m_{bm}^{(j)}(0)$  послідовно приймає значення із множини  $m_{bm}(0)$ ;  $N_m$  – потужність множини  $m_{bm}(0)$ .

Величина  $y_j$  є функцією безрозмірного аргументу  $x$ . При чисельному розв'язуванні системи рівнянь (11) методом Рунге-Кутта крок інтегрування  $h$  є незмінною величиною. Це означає, що величина  $x$  змінювала своє значення від 0 до  $x_f$  з постійним кроком  $h$ . Процес інтегрування закінчувався при виконанні умови  $y(x_k) \leq 0$ .

Для знаходження значення, при якому  $y(x_s) = 0$ , починаючи з  $y(x_k)$ , визначались значення  $y(x_{k-1})$  і  $y(x_{k-2})$ . За отриманими значеннями  $y(x_{k-2}), y(x_{k-1})$  і  $y(x_k)$  будувався поліном Лагранжа другого порядку. Внаслідок отримали квадратне рівняння

$$a_{L,1}x^2 + a_{L,2}x + a_{L,3} = 0,$$

більший додатний корінь якого визначав значення  $x_f^{(j)}, j = \overline{1, R_j}$ .

Параметри моделі (17) при  $r=3$  обчислювались за формулою (15), в якій  $\bar{\Pi} = \bar{Y}_f$ . Для знаходження елементів матриці  $F$  формувалась матриця спостережень  $X$ , яка складається із  $N_f$  блоків. Для кожного блоку його рядок обчислювався так:

$$\chi_i = \bar{O}_j m_{bm}^{(j)}(0) \bar{O}_j f_2^{(i)} \bar{x}_j; i = \overline{1, N_f}, j = \overline{1, N_m},$$

де  $\bar{O}_j$  – одинична матриця-стовпець розміром  $R_j$ ;  $\bar{x}_j$  – значення абсцис функції  $y(\bar{x}_j)$ , яка отримана як результат розв'язування системи диференціальних рівнянь (11) при значеннях  $m_{bm}^{(j)}(0)$  і  $f_2^{(i)}$ ;  $N_f$  – потужність множини значень  $f_2$ .

У результаті отримали матрицю спостережень розміром  $R \times 3$ .

З використанням матриці спостережень  $X$  формується матриця  $F$ , кожний стовпець, якої є значеннями регресу при відповідному коефіцієнті емпіричної моделі (17).



Обчислення елементів матриці  $F$  здійснюється за таким алгоритмом. Формується матриця степенів  $\Phi$ , елементи якої обчислюються за методом [9], при якому одиниця додається до вмісту  $q$ -розряду вектору  $n$  ( $n$  – кількість аргументів моделі (17)). У результаті додавання відбувається послідовний перехід одиниці у старший розряд. При досягненні суми  $S = k$  ( $1 \leq k \leq r$ ) у нижчому розряді останній обнуляється. Сума елементів кожного рядка матриці  $\Phi$  не перевищує значення  $r$ . Розмір матриці  $\Phi$  –  $L \times n$ . Якщо відома матриця степенів  $\Phi$  поліному (17), то елементи матриці  $F$  обчислюються такою формулою:

$$f_{ij} = \prod_{j=1}^n x_j^{\Phi_{ij}}, \quad i = \overline{1, R}, \quad j = \overline{1, L}.$$

### Результати досліджень та висновки

У середовищі MatLab створене програмне забезпечення, яке виконує такі процедури:

- розв'язує систему диференціальних рівнянь (11) при значеннях  $m_{bm}(0)$  і  $f_2$ , які задані відповідними множинами. При цьому зовнішній цикл формується за індексом  $i$ . За результатами обчислень формується матриця спостережень  $X$ .

- за описаним вище алгоритмом обчислюється матриця  $F$  і відповідно за формулою (15) обчислюються параметри моделі (17).

Таким чином, критичне навантаження на долото при бурінні свердловин визначається двома факторами – довжиною від нейтрального перерізу до вибою свердловини  $x_2$  і значенням  $x_3$ , яке є точкою максимального прогину бурильної колони.

### Список використаних джерел

- [1] Основи нафтогазової справи / Білецький В. С., Орловський В. М., Дмитренко В. І., Похилко В. М. Полтава: ПолтНТУ, Київ: ФОП Халіков Р. Х., 2017. 312 с.
- [2] Вудс Г., Лубинский А. Искривление скважин при бурении / пер. с англ. М.: Гостехиздат, 1960. 161 с.
- [3] Тимошенко С. П., Гере Дж. Механика материалов: учебник, 2-е изд. СПб: Лань, 2002. 672 с.
- [4] Султанов Б. З. Управление устойчивостью и динамикой буровой колонны. М.: Недра, 1991. 208 с.
- [5] Горбійчук М. І., Пістун Є. П. Числові методи і моделювання на ЕОМ: навчальний посібник. Івано-Франківськ, 2010. 409 с.
- [6] Ермаков С. М., Ермаков С. М., Жиглявский А. А. Математическая теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1987. 320 с.
- [7] Mikhail I. Gorbilychuk, Taras V. Humenyuk Synthesis Method of Empirical Models Optimal by Complexity under Uncertainty Conditions Journal of Automation and Information Sciences. – vol. 48, is. 9. – P. 64 -74. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v48.i9.50>
- [8] Горбійчук М. І., Когутяк М. І., Заячук Я. І. Індуктивний метод побудови математичних моделей газоперекачувальних агрегатів природного газу // Нафтова і газова промисловість. 2008. № 5. С. 32 – 35.

### Referens

- [1] Osnovy naftogazovoyi spravy / Bilets'kyi V. S., Orlovs'kyi V. M., Dmytrenko V. I., Pokhylko V. M. Poltava: PoltNTU, Kyiv: FOP Khalikov R. KH., 2017. 312 s.
- [2] Vuds H., Lubynskyy A. Yskrevlenye skvazhyn pry burenyy / per. s anhl. M.: Hostekhyzdat, 1960. 161 s.
- [3] Tymoshenko S. P., Here Dzh. Mekhanyka materyalov: uchebnyk, 2-e yzd. SPb: Lan', 2002. 672 s.
- [4] Sultanov B. Z. Upravlenye ustoychyvost'yu y dynamykoj buryl'noy kolonny. M.: Nedra, 1991. 208 s.
- [5] Horbilychuk M. I., Pistun YE. P. Chyslovi metody i modelyuvannya na EOM: navchal'nyy posibnyk. Ivano-Frakvivs'k, 2010. 409 s.
- [6] Ermakov S. M., Ermakov S. M., Zhyhlyavskyy A. A. Matematycheskaya teoryya optymal'noho eksperymenta. M.: Nauka, 1987. 320 s.
- [7] Mikhail I. Gorbilychuk, Taras V. Humenyuk Synthesis Method of Empirical Models Optimal by Complexity under Uncertainty Conditions Journal of Automation and Information Sciences. – vol. 48, is. 9. – P. 64 -74. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v48.i9.50>
- [8] Horbilychuk M. I., Kohutyak M. I., Zayachuk YA. I. Induktyvnyy metod pobudovy matematychnykh modeley hazoperekachual'nykh ahreativ pryrodnoho hazu // Naftova i hazova promyslovis't'. 2008. № 5. S. 32 – 35.

Отримана в редакції 27.01.2021. Прийнята до друку 24.02.2021. Received 27 January 2021. Approved 24 February 2021. Available in Internet 31 March 2021.