О регулярных тканях, определенных плюригармоническими функциями

Л. М. Пиджакова, А. М. Шелехов

Abstract. As is known, the function of two variables $z = f(x, y)$ on the plane of the variables (x, y) in the neighborhood of a regular point defines a three-web formed by the foliations $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, and $f(x, y) = \text{const}$. A three-web is called *regular* if it is equivalent (locally diffeomorphic) to a three-web formed by three families of parallel lines. In this case, the equation of the three-web has the form $z = f(\alpha(x) + \beta(y))$.

In one of the works of the authors of this article, all regular three-webs, determined by some well-known partial differential equations, in particular, determined by harmonic functions, were found. In the present paper, the results are generalized for pluriharmonic functions of the form

$$u = f(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r).$$

First, a function of this type on a manifold of dimension $2r$ determines a $(2r + 1)$ -web formed by foliations of codimension 1:

$$x_i = \text{const}, \quad y_i = \text{const}, \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad u = \text{const}.$$

A $(2r + 1)$ -web is called *regular* if in some local coordinates its equation can be written as

$$u = f(\varphi_1(x_1) + \dots + \varphi_r(x_r) + \psi_1(y_1) + \dots + \psi_r(y_r)).$$

In the present paper, we find all pluriharmonic functions defining regular $(2r + 1)$ -webs (Theorem 1).

On the other hand, each pluriharmonic function

$$u = f(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r)$$

defines a three-web $W(r, r, 2r - 1)$ on a $2r$ -dimensional manifold formed by two r -dimensional foliations $x_i = \text{const}$ and $y_i = \text{const}$ and one foliation $u = \text{const}$ of codimension 1. This three-web is called regular if its equation in some local coordinates can be written as

$$u = f(\varphi(x_1, x_2, \dots, x_r) + \psi(y_1, y_2, \dots, y_r)).$$

In this work found all pluriharmonic functions defining regular $W(r, r, 2r - 1)$ -webs (Theorem 2).

Ключевые слова: плюригармоническая функция, регулярная ткань

Анотація. Як відомо, функція двох змінних $z = f(x, y)$ визначає на площині (x, y) в околі регулярної точки деяку три-тканину, утворену шаруваннями $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ та $f(x, y) = \text{const}$. Три-тканина називається *регулярною*, якщо вона еквівалента (тобто локально дифеоморфна) три-тканині, утвореній трьома сім'ями паралельних прямих. В цьому випадку рівняння тканини має вигляд $z = f(\alpha(x) + \beta(y))$.

В одній з робіт авторів цієї статті були знайдені всі регулярні три-тканини, що задаються деякими відомими рівняннями в частинних похідних, зокрема, визначаються гармонійними функціями. В даній роботі ці результати узагальнюються на випадок плюригармонічних функцій виду $u = f(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r)$.

По-перше, така функція на многовиді розмірності $2r$ визначає $(2r+1)$ -тканину, утворену шаруваннями ковиміру 1 виду

$$x_i = \text{const}, \quad y_i = \text{const}, \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad u = \text{const}.$$

$(2r+1)$ -тканина називається *регулярною*, якщо в деяких локальних координатах її рівняння може бути записано у вигляді

$$u = f(\varphi_1(x_1) + \dots + \varphi_r(x_r) + \psi_1(y_1) + \dots + \psi_r(y_r)).$$

В представлений роботі ми знаходимо всі плюригармонічні функції, що визначають регулярні $(2r+1)$ -тканини (теорема 1).

З іншого боку, кожна плюригармонічна функція

$$u = f(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r)$$

на $2r$ -вимірному многовиді визначає три-тканину $W(r, r, 2r-1)$, утворену двома r -вимірними шаруваннями $x_i = \text{const}$ і $y_i = \text{const}$ та шаруванням $u = \text{const}$ ковиміру 1. Ця тканина називається *регулярною*, якщо в деяких локальних координатах її рівняння може бути записано у вигляді

$$u = f(\varphi(x_1, x_2, \dots, x_r) + \psi(y_1, y_2, \dots, y_r)).$$

Ми також знаходимо всі плюригармонічні функції, що визначають регулярні три-тканини $W(r, r, 2r-1)$ (теорема 2).

В работе [3] рассматриваются решения вида $z = f(\alpha(x) + \beta(y))$ некоторых уравнений в частных производных. В частности, найдены гармонические функции такого строения. На плоскости (XOY) указанные функции определяют, как известно [1], [4], регулярные три-ткани.

Целью данной работы является обобщение полученных результатов для плюригармонических функций вида

$$u = f(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r). \quad (1)$$

С одной стороны, функция (1) определяет в окрестности регулярной точки пространства $\mathbb{R}^{2r}$ переменных (x_i, y_i) $(2r+1)$ -ткань, образованную $2r+1$ слоениями коразмерности 1: $x_i = \text{const}$, $y_i = \text{const}$ и $u = \text{const}$ (здесь и далее $i, j, k = 1, 2, \dots, r$). Уравнение (1) называется уравнением этой ткани. $(2r+1)$ -ткань называется *регулярной*, если допустимой

заменой переменных ее уравнение можно привести к виду

$$u = f(\varphi_1(x_1) + \dots + \varphi_r(x_r) + \psi_1(y_1) + \dots + \psi_r(y_r)). \quad (2)$$

С другой стороны, уравнение (1) определяет в пространстве $\mathbb{R}^{2r}$ три-ткань $W(r, r, 2r - 1)$ со слоениями различной размерности: два r -параметрических слоения $x_i = \text{const}$ и $y_i = \text{const}$, и одно слоение $u = \text{const}$ коразмерности 1. Три-ткань $W(r, r, 2r - 1)$ называется *регулярной*, если функция (1) имеет вид

$$u = f(\varphi(x_1, x_2, \dots, x_r) + \psi(y_1, y_2, \dots, y_r)), \quad (3)$$

или короче $u = f(\varphi(x_i) + \psi(y_i))$.

Функция вида (1) называется *плюригармонической*, если выполняются следующие условия [2]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial y_i}. \quad (5)$$

1. Найдём плюригармонические функции вида (2). Для них уравнения (5) примут вид:

$$u'' \cdot (\varphi'_i \cdot \psi'_j - \varphi'_j \cdot \psi'_i) = 0, \quad (6)$$

а уравнения (4) — вид

$$u'' \cdot (\varphi'_i \cdot \varphi'_j + \psi'_i \cdot \psi'_j) = 0 \text{ при } i \neq j, \quad (7)$$

и

$$u'' \cdot ((\varphi'_i)^2 + (\psi'_i)^2) + u' \cdot (\varphi''_i + \psi''_i) = 0 \text{ при } i = j. \quad (8)$$

а) Если $u'' = 0$, то уравнения (6) и (7) удовлетворяются, а функция u является линейной:

$$u = a(\varphi_1(x_1) + \dots + \varphi_r(x_r) + \psi_1(y_1) + \dots + \psi_r(y_r)) + b, \quad (9)$$

для всех $a, b \in \mathbb{R}$. Соотношения (8) примут вид:

$$u' \cdot (\varphi''_i + \psi''_i) = 0.$$

Так как $u' \neq 0$ ($u \neq \text{const}$), то имеем, что $\varphi''_i(x_i) + \psi''_i(y_i) = 0$ для любых i . Так как аргументы x_i и y_i независимы, то $\varphi''_i = -\psi''_i = 2c_i = \text{const}$, то есть

$$\varphi_i(x_i) = c_i x_i^2 + b_i x_i + a_i, \quad \psi_i(y_i) = -c_i y_i^2 + m_i y_i + n_i,$$

для всех $a_i, b_i, c_i, m_i, n_i \in \mathbb{R}$. Подставляя найденные функции $\varphi_i(x_i)$ и $\psi_i(y_i)$ в (9), получаем

$$u = \sum_{i=1}^r c_i (x_i^2 - y_i^2) + \sum_{i=1}^r a_i x_i + \sum_{i=1}^r b_i y_i + k, \quad (10)$$

для всех $a_i, b_i, c_i, k \in \mathbb{R}$.

б) Если $u'' \neq 0$, то уравнения (6) и (7) принимают следующий вид:

$$\varphi'_i \cdot \psi'_j - \varphi'_j \cdot \psi'_i = 0 \quad \forall i, j, \quad (6')$$

$$\varphi'_i \cdot \varphi'_j + \psi'_i \cdot \psi'_j = 0 \quad \text{при } i \neq j. \quad (7')$$

Из уравнений (6') имеем $\frac{\varphi'_i(x_i)}{\varphi'_j(x_j)} = \frac{\psi'_i(y_i)}{\psi'_j(y_j)}$. Так как левая и правая части зависят от разных переменных, то эти отношения могут быть только константами, то есть $\frac{\varphi'_i(x_i)}{\varphi'_j(x_j)} = \frac{\psi'_i(y_i)}{\psi'_j(y_j)} = c_{ij} = \text{const}$, или

$$\varphi'_i(x_i) = c_{ij} \varphi'_j(x_j), \quad \psi'_i(y_i) = c_{ij} \psi'_j(y_j).$$

Поскольку аргументы функций левых и правых частей последних уравнений независимы, то они выполняются тогда и только тогда, когда $\varphi'_i(x_i) = a_i$, $\psi'_i(y_i) = c_i$, $a_i = \text{const}$, $c_i = \text{const}$, откуда $\varphi_i(x_i) = a_i x_i + b_i$, $\psi_i(y_i) = c_i y_i + k_i$, $a_i, b_i, c_i, k_i \in \mathbb{R}$. В силу (7') коэффициенты этих функций связаны условиями

$$a_i \cdot a_j + c_i \cdot c_j = 0, \quad i \neq j. \quad (11)$$

Последние условия можно переписать в виде $\frac{a_i}{c_i} = -\frac{a_j}{c_j} \quad \forall i, j$. Полагая $\frac{a_i}{c_i} = p_i$, получим $p_i = -p_j$, $p_i = -p_k$, $p_j = -p_k$, а следовательно $p_i = 0$.

Таким образом, условия (11) выполняются только если $a_i = c_i = 0$, для всех i , т. е. функции $\varphi_i(x_i)$ и $\psi_i(y_i)$ являются постоянными. Итак, в случае $u'' \neq 0$ получаем только тривиальное решение $u = \text{const}$, то есть ткань не существует. Доказана

Теорема 1. Уравнение регулярной $(2r+1)$ -ткани, определяемой плюригармонической функцией, имеет вид (10).

2. Пусть плюригармонические функции имеют вид (3), где

$$\varphi(x_1, \dots, x_r) = \varphi(x_i), \quad \psi(y_1, \dots, y_r) = \psi(y_i).$$

Тогда уравнения (5) примут вид:

$$u'' \cdot (\varphi'_{x_i} \cdot \psi'_{y_j} - \varphi'_{x_j} \cdot \psi'_{y_i}) = 0 \quad \forall i, j, \quad (12)$$

а уравнения (4) —

$$u'' \cdot (\varphi'_{x_i} \varphi'_{x_j} + \psi'_{y_i} \psi'_{y_j}) + u' \cdot (\varphi''_{x_i x_j} + \psi''_{y_i y_j}) = 0 \quad \forall i, j. \quad (13)$$

а) Если $u'' = 0$, то уравнения (12) удовлетворяются, а функция u является линейной:

$$u = a(\varphi(x_i) + \psi(y_i)) + b, \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

При этом уравнения (13) переписутся в виде $u' \cdot (\varphi''_{x_i x_j} + \psi''_{y_i y_j}) = 0$.

Так как $u' \neq 0$ ($u \neq \text{const}$), то имеем $\varphi''_{x_i x_j} + \psi''_{y_i y_j} = 0$ для любых i, j . Так как аргументы функций $\varphi(x_i)$ и $\psi(y_i)$ независимы, то

$$\varphi''_{x_i x_j} = -\psi''_{y_i y_j} = 2c_{ij} = \text{const},$$

то есть указанные функции имеют следующее строение

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_r) &= \sum_{i,j=1}^r c_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^r a_i x_i + k, \\ \psi(y_1, \dots, y_r) &= - \sum_{i,j=1}^r c_{ij} y_i y_j + \sum_{i=1}^r m_i y_i + p, \end{aligned} \quad (15)$$

где $c_{ij}, a_i, m_i, k, p \in \mathbb{R}$. Подставляя найденные функции (15) в (14), получаем

$$u = \sum_{i,j=1}^r c_{ij} (x_i x_j - y_i y_j) + \sum_{i=1}^r a_i x_i + \sum_{i=1}^r m_i y_i + b, \quad c_{ij}, a_i, m_i, b \in \mathbb{R}. \quad (16)$$

б) Если $u'' \neq 0$, то из уравнений (12) получим $\varphi'_{x_i} \cdot \psi'_{y_j} - \varphi'_{x_j} \cdot \psi'_{y_i} = 0$ или

$$\frac{\varphi'_{x_i}(x_1, \dots, x_r)}{\varphi'_{x_j}(x_1, \dots, x_r)} = \frac{\psi'_{y_i}(y_1, \dots, y_r)}{\psi'_{y_j}(y_1, \dots, y_r)}.$$

Так как левая и правая части зависят от разных переменных, то эти отношения могут быть только константами, то есть

$$\frac{\varphi'_{x_i}(x_1, \dots, x_r)}{\varphi'_{x_j}(x_1, \dots, x_r)} = \frac{\psi'_{y_i}(y_1, \dots, y_r)}{\psi'_{y_j}(y_1, \dots, y_r)} = c_{ij} = \text{const}.$$

Отсюда получим $\varphi'_{x_i} = c_{ij} \varphi'_{x_j}$, $\psi'_{y_i} = c_{ij} \psi'_{y_j}$.

Последние равенства означают, что функции $\varphi'_{x_i}(x_1, \dots, x_r)$ пропорциональны друг другу.

Потому полный дифференциал функции $\varphi(x_1, \dots, x_r)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} d\varphi &= \sum_{i=1}^r \varphi'_{x_i} dx_i = \varphi'_{x_1} dx_1 + \dots + \varphi'_{x_r} dx_r = \\ &= \varphi'_{x_1} dx_1 + \dots + c_{1r} \varphi'_{x_1} dx_r = \varphi'_{x_1} d(x_1 + \dots + c_{1r} x_r). \end{aligned}$$

Последнее означает, что функция $\varphi(x_i)$ имеет следующее строение:

$$\varphi(x_1, \dots, x_r) = \varphi(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_r x_r), \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Рассуждая аналогично для функции $\psi(y_i)$, получим

$$\psi(y_1, \dots, y_r) = \psi(\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_r y_r), \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

С учётом строения функций $\varphi(x_i)$ и $\psi(y_i)$ уравнение (16) дает:

$$\alpha_i \alpha_j (u'' \cdot ((\varphi')^2 + (\psi')^2) + u'(\varphi'' + \psi'')) = 0, \quad \alpha_i \neq 0, \quad \forall i.$$

Последнее равенство перепишем в виде:

$$\varphi'' + \psi'' = -\frac{u''}{u'} \cdot ((\varphi')^2 + (\psi')^2),$$

и обозначим $-\frac{u''}{u'} = g$. Тогда получим уравнение

$$\varphi'' + \psi'' = g \cdot ((\varphi')^2 + (\psi')^2). \quad (17)$$

Продифференцировав равенство (17) по x_k , а затем по y_m , придём к уравнению

$$\alpha_k \alpha_m \varphi' \psi' (g' ((\varphi')^2 + (\psi')^2) + 2g'(\varphi'' + \psi'')) = 0.$$

Так как φ и ψ не являются постоянными, то $\varphi' \psi' \neq 0$. Приравнявая выражение в скобках к нулю, с учетом (17) получим уравнение

$$g'' + 2g' \cdot g = 0,$$

или $g'' + (g^2)' = 0$. Интегрируя, получим $g' + g^2 = c$, $c \in \mathbb{R}$.

1) В случае $c = a^2$ решение имеет вид $g = -a \cdot \coth a(b - \theta)$.

2) В случае $c = -a^2$ решение имеет вид $g = a \cdot \tan a(b - \theta)$.

3) В случае $c = 0$ решение имеет вид $g = \frac{1}{b + \theta}$.

Во всех случаях $b \in \mathbb{R}$, $\theta = \varphi(x_i) + \psi(y_i)$.

В первом случае при подстановке в (17) функции g , получим

$$\varphi'' + \psi'' = -a \cdot \coth a(b - \theta) \cdot ((\varphi')^2 + (\psi')^2).$$

Продифференцировав это равенство по x_k , а затем по y_m , получим

$$2a^3 \alpha_k \alpha_m \varphi' \psi' \frac{\sinh a(b - \varphi - \psi)}{\cosh^3 a(b - \varphi - \psi)} = 0.$$

Так как функции φ и ψ не являются постоянными, то отсюда находим

$$\sinh a(b - \varphi - \psi) = 0, \quad \varphi + \psi = b,$$

что невозможно, поскольку φ и ψ зависят от разных независимых аргументов.

Во втором случае получаем аналогичный результат.

В третьем случае равенство (17) примет вид

$$(\varphi'' + \psi'')(b + \varphi + \psi) = (\varphi')^2 + (\psi')^2. \quad (18)$$

Продифференцировав равенство (18) по x_k , а затем по y_m , получим

$$\varphi''' \psi' + \varphi' \psi''' = 0.$$

Отсюда $\frac{\varphi'''}{\varphi'} = -\frac{\psi'''}{\psi'} = -p^2 = \text{const}$, или

$$\varphi''' + p^2 \varphi' = 0, \quad \psi''' - p^2 \psi' = 0.$$

Пусть $\varphi''' \neq 0$, $\psi''' \neq 0$, тогда решения последних уравнений имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i \right) &= \frac{r}{p} \cos \left(p \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i \right) + \frac{s}{p} \sin \left(p \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i \right), \\ \psi \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i y_i \right) &= \frac{g}{p} \coth \left(p \sum_{i=1}^r \alpha_i y_i \right) + \frac{h}{p} \sinh \left(p \sum_{i=1}^r \alpha_i y_i \right), \end{aligned} \quad (19)$$

где $r, s, g, h \in \mathbb{R}$.

Найдем функцию u из уравнения $-\frac{u''}{u'} = \frac{1}{b + \varphi(x_i) + \psi(y_i)}$ (см. выше). После интегрирования, получим $u = c_1 \ln(b + \varphi(x_i) + \psi(y_i)) + c_2$, где $c_1 = c_2 = \text{const}$.

Таким образом, учитывая (19), окончательно получаем

$$\begin{aligned} u &= c_1 \ln \left(b + \frac{r}{p} \cos \left(p \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i \right) + \frac{s}{p} \sin \left(p \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{g}{p} \coth \left(p \sum_{i=1}^r \alpha_i y_i \right) + \frac{h}{p} \sinh \left(p \sum_{i=1}^r \alpha_i y_i \right) \right) + c_2. \end{aligned} \quad (20)$$

Рассмотрим случай, когда $\varphi''' = 0$, $\psi''' = 0$. Тогда функции φ и ψ имеют следующее строение:

$$\begin{aligned}\varphi\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i\right) &= a_0 \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i\right)^2 + a_1 \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i + a_2, \\ \psi\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i y_i\right) &= b_0 \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i y_i\right)^2 + b_1 \sum_{i=1}^r \alpha_i y_i + b_2,\end{aligned}$$

а функция u имеет вид:

$$\begin{aligned}u = c_1 \ln &\left(b + a_0 \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i\right)^2 + a_1 \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i + \right. \\ &\left. + b_0 \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i y_i\right)^2 + b_1 \sum_{i=1}^r \alpha_i y_i\right) + c_2. \quad (21)\end{aligned}$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. Уравнение регулярной ткани $W(r, r, 2r - 1)$, определяемой плоригармонической функцией, имеет вид (20) или (21).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. Бляшке. *Введение в геометрию тканей*. М., Физматгиз, 1956.
- [2] Б. В. Шабат. *Введение в комплексный анализ*. М., Наука, 1985.
- [3] А. М. Шелехов. О «шестиугольных» решениях некоторых уравнений в частных производных. *Proceedings of the International Geometry Center*, 10(2):47–55, 2017.
- [4] А. М. Шелехов, В. Б. Лазарева, А. А. Уткин. *Криволинейные три-ткани*. Тверь, 2013.

Поступила в редакцию 18 сентября 2018, принята к печати 2 ноября 2018.

Пиджакова Любовь Михайловна

ТВЕРСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Email: lpidjhacova@mail.ru

Шелехов Александр Михайлович

МОСКОВСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Email: amshelekhov@rambler.ru