Специальные классы псевдоримановых пространств с f - структурой, допускающих $2F$ - планарные отображения

Коновенко Н.Г., Курбатова И.Н.

Abstract. The article studies $2F$ -planar mappings of pseudo-Riemannian spaces equipped with a certain type of affinor structure. The concept of a $2F$ -planar mapping of affine-connected and Riemannian spaces was introduced by R. J. Kadem. In his works, the general questions of the theory of $2F$ -planar mappings of affine-connected and Riemannian spaces equipped with an affinor structure were investigated. In particular, he proved that such a mapping, of necessity, preserves the affinor structure. We consider a $2F$ -planar mapping of pseudo-Riemannian spaces with an absolutely parallel f -structure. Earlier, we proved that a pseudo-Riemannian space with an absolutely parallel f -structure is a product of two pseudo-Riemannian spaces, one of which is Kahler; the class of pseudo-Riemannian spaces with an absolutely parallel f -structure is closed with respect to the mappings under consideration; under the condition of covariant constancy of the affinor, the f -structures in the displayed spaces, non-trivial $2F$ -planar mappings can be of three types: full and canonical I, II types; depending on the type, the $2F$ -planar mapping induces a geodesic, holomorphically-projective or affine mapping on the components of the product of the displayed spaces.

We continue the study of $2F$ -planar mapping of pseudo-Riemannian spaces with absolutely parallel f -structure. For all types of this mapping (main and canonical I and II), geometric objects are constructed that are invariant with respect to the mappings under consideration: an inhomogeneous object (such as the Thomas parameters in the theory of geodesic mappings of Riemannian spaces) and a tensor (of the holomorphically projective curvature tensor type in the theory of holomorphically- projective mappings of Kahler manifolds). Classes of spaces ($2F$ -flat, $2F(I)$ - and $2F(II)$ -flat), admitting $2F$ -planar mapping, are distinguished. For them, the structure of the Riemann tensor is revealed and analogues of the Beltrami theorem from the theory of geodesic mappings are proved. The metrics of $2F$ -, $2F(I)$ - and $2F(II)$ -flat spaces in a special coordinate system are found.

Ключевые слова: f -структура, $2F$ -планарное отображение

DOI: <http://dx.doi.org/>

Аннотация. В статье изучаются $2F$ -планарные отображения псевдоримановых пространств, снабженных аффинорной структурой определенного типа. Понятие $2F$ -планарного отображения аффинносвязных и римановых пространств было введено в рассмотрение Р. Дж. Кадемом. В его работах исследовались общие вопросы теории $2F$ -планарных отображений аффинносвязных и римановых пространств, снабженных аффинорной структурой. В частности, он доказал, что такое отображение по необходимости сохраняет аффинорную структуру. Мы рассматриваем $2F$ -планарное отображение псевдоримановых пространств с абсолютно параллельной f -структурой. Ранее в [4] мы доказали, что псевдориманово пространство с абсолютно параллельной f -структурой представляет собой произведение двух псевдоримановых пространств, одно из которых келерово; класс псевдоримановых пространств с абсолютно параллельной f -структурой замкнут относительно рассматриваемых отображений; при условии ковариантного постоянства аффинора f -структуры в отображаемых пространствах нетривиальные $2F$ -планарные отображения могут быть трех типов: полные и канонические I, II типа; в зависимости от типа $2F$ -планарное отображение индуцирует на компонентах произведения отображаемых пространств геодезическое, голоморфно-проективное или аффинное отображение.

В настоящей статье для всех типов $2F$ -планарного отображения (основного и канонических I и II) строятся геометрические объекты, инвариантные относительно рассматриваемых отображений: неоднородный объект (типа параметров Томаса в теории геодезических отображений римановых пространств) и тензорный (типа тензора голоморфно-проективной кривизны в теории аналитически-планарных отображений келеровых многообразий). Выделены классы пространств ($2F$ -, $2F(I)$ - и $2F(II)$ -плоские), допускающих $2F$ -планарное отображение. Для них выявлена структура тензора Римана и доказаны аналоги теоремы Бельтрами из теории геодезических отображений. Найдены метрики $2F$ -, $2F(I)$ - и $2F(II)$ -плоских пространств в специальной системе координат.

1. ВВЕДЕНИЕ

В [4] мы исследовали $2F$ -планарные отображения, которые были введены Р. Дж. Кадемом [1] как естественное обобщение таких известных диффеоморфизмов аффинносвязных и римановых пространств, наделенных аффинорной структурой, как геодезические [6] и голоморфно-проективные [2] отображения.

В [1] были рассмотрены общие вопросы $2F$ -планарного отображения ($2F$ ПО) аффинносвязных и римановых пространств с аффинорной структурой. В частности, показано, что $2F$ ПО между пространствами (V_n, g_{ij}, F_i^h) , $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$ с метрическими тензорами $g_{ij}, \bar{g}_{ij}$ и аффинорными структурами $F_i^h, \bar{F}_i^h$, соответственно, по необходимости сохраняет структуру, т.е. в общей по отображению системе координат (x^i)

имеют место

$$F_i^h(x) = \overline{F}_i^h(x), \quad h, i = 1, 2, \dots, n.$$

В [1] изучались 2ФПО псевдоримановых пространств со структурой вида $F_\alpha^h F_\beta^\alpha F_i^\beta = \delta_i^h$ при условии ковариантного постоянства аффинора.

В [5] рассматривались некоторые вопросы 2ФПО псевдоримановых пространств с абсолютно параллельной обобщенной f -структурой, [7], которая определяется соотношениями

$$F_\alpha^h F_\beta^\alpha F_i^\beta + e F_i^h = 0, \quad e = +1, -1,$$

и согласована с метрикой пространств $V_n, \overline{V}_n$ в виде

$$g_{i\alpha} F_j^\alpha + g_{j\alpha} F_i^\alpha = 0, \quad \overline{g}_{i\alpha} F_j^\alpha + \overline{g}_{j\alpha} F_i^\alpha = 0.$$

Продолжая изучение 2ФПО псевдоримановых пространств с f -структурой в [4], мы выяснили, что класс пространств с абсолютно параллельной f -структурой является замкнутым относительно рассматриваемых отображений и представляет собой произведение псевдоримановых пространств, одно из которых келерово. Далее, показано, что при условии ковариантного постоянства f -структуры нетривиальные $2F$ -планарные отображения могут быть трех типов: полные и канонические I, II типа. В [4] доказано, что $2F$ ПО в зависимости от типа индуцирует на компонентах произведения, представляющего отображаемые пространства, геодезическое [6], голоморфно-проективное [2] или аффинное [6] отображение.

В настоящей статье мы рассматриваем вопросы, традиционно возникающие при изучении любых диффеоморфизмов, а именно: строим геометрические объекты, инвариантные относительно рассматриваемых отображений, выделяем классы псевдоримановых пространств с абсолютно параллельной f -структурой, допускающих $2F$ ПО, и приводим их метрики в специальной системе координат.

Исследование ведется в тензорной форме, локально, в классе вещественных достаточно гладких, а в общем случае аналитических функций.

2. Типы $2F$ -ПЛАНАРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ С АБСОЛЮТНО ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ f -СТРУКТУРОЙ

1°. Рассмотрим псевдориманово пространство (V_n, g_{ij}, F_i^h) с метрическим тензором g_{ij} и аффинорной структурой F_i^h . Напомним, что F_i^h определяет f -структуру, [3], если имеют место условия

$$\begin{aligned} F_\alpha^h F_\beta^\alpha F_i^\beta + F_i^h &= 0, \quad i, h, \alpha, \beta, \dots = 1, 2, \dots, n, \\ Rg \| F_i^h \| &= 2k \quad (2k < n). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Будем считать f -структуру согласованной с метрикой V_n в виде

$$F_{ij} + F_{ji} = 0, \quad F_{ij} = g_{i\alpha} F_j^\alpha \quad (2.2)$$

Обозначим

$$F_i^h = F_i^h, \quad F_i^h = F_\alpha^h F_i^\alpha.$$

Мы полагаем аффинор ковариантно постоянным:

$$F_{i,j}^h = 0, \quad (2.3)$$

где „ $\cdot$ ” — знак ковариантной производной в V_n .

2°. Пусть (V_n, g_{ij}, F_i^h) и $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$ — псевдоримановы пространства с заданными на них аффинорными структурами. $2F$ -планарное отображение V_n на $\bar{V}_n$ в общей по отображению системе координат (x^i) характеризуется основными уравнениями, [1],

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i} \delta_{j)}^h + \phi_{(i} F_{j)}^h + \sigma_{(i} F_{j)}^h, \quad (2.4)$$

$$F_i^h(x) = \bar{F}_i^h(x), \quad (2.5)$$

где $\Gamma_{ij}^h, \bar{\Gamma}_{ij}^h$ — компоненты объектов связности $V_n, \bar{V}_n$; $\psi_i(x), \phi_i(x), \sigma_i(x)$ — некоторые ковекторы, а круглыми скобками обозначена операция симметрирования. $2F$ ПО считается *тривиальным* при $\psi_i = \phi_i = \sigma_i = 0$.

Ранее мы показали, [4], что при условиях (2.1), (2.3) и (2.5) из (2.4) следует, что

$$\psi_\alpha F_i^\alpha = 0, \quad \sigma_i = \psi_i - \phi_\alpha F_i^\alpha, \quad \phi_i = \sigma_\alpha F_i^\alpha, \quad (2.6)$$

а также что $\sigma_i = 0$ эквивалентно $\psi_i = \phi_i = 0$, то есть в этом случае $2F$ ПО тривиально. Поэтому нетривиальные $2F$ ПО следует искать среди отображений (V_n, g_{ij}, F_i^h) на $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$ с основными уравнениями (2.4), где имеет место один из вариантов:

$$\begin{array}{lll} I : & \psi_i = 0, & \phi_i \neq 0, \quad \sigma_i \neq 0; \\ II : & \psi_i \neq 0, & \phi_i = 0, \quad \sigma_i \neq 0; \\ III : & \psi_i \neq 0, & \phi_i \neq 0, \quad \sigma_i \neq 0. \end{array}$$

Мы называем $2F$ -планарное отображение *каноническим* $I(II)$ типа и обозначать $2F$ ПО(I), $2F$ ПО(II) в случаях I, II и $2F$ ПО *основного типа* в случае III.

3°. Условимся в дальнейшем операцию свертывания с аффинором называть сопряжением по соответствующему индексу и обозначать следующим образом:

$$\begin{aligned} T_{\bar{i} \dots}^{\dots} &= T_{\alpha \dots}^{\dots} F_i^\alpha, & T_{\bar{i} \dots}^{\bar{\dots}} &= T_{\dots}^{\alpha \dots} F_\alpha^i, \\ T_{\bar{i} \dots}^{\dots} &= T_{\alpha \dots}^{\dots} F_i^\alpha, & T_{\bar{i} \dots}^{\bar{\dots}} &= T_{\dots}^{\alpha \dots} F_\alpha^i. \end{aligned}$$

4°. Применяя тождество Риччи к аффинору F_i^h с учетом (2.3) и (2.1), получаем используемые нами в дальнейшем свойства тензоров Римана и Риччи псевдориманова пространства с f -структурой:

$$R_{\bar{h}ijk} = -R_{h\bar{i}jk}, \quad R_{\bar{h}ijk} = R_{h\bar{i}jk}, \quad R_{\bar{h}i} = -R_{h\bar{i}}. \quad (2.7)$$

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО $2F$ -ПЛАНАРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ С АБСОЛЮТНО ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ f -СТРУКТУРОЙ

1°. Рассмотрим $2F$ ПО основного типа между псевдоримановыми пространствами с абсолютно параллельной f -структурой

$$(V_n, g_{ij}, F_i^h) \quad \text{и} \quad (\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h).$$

Его основные уравнения в общей по отображению системе координат имеют вид, [4]:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{ij}^h &= \Gamma_{ij}^h + \psi_{(i} \delta_{j)}^h + \phi_{(i} F_{j)}^h + \sigma_{(i} F_{j)}^h, \\ F_\alpha^h F_\beta^\alpha F_i^\beta + F_i^h &= 0, \\ F_{ij}^1 + F_{ji}^1 &= 0, \quad F_{ij}^1 = g_{i\alpha} F_j^\alpha, \\ \bar{F}_{ij}^1 + \bar{F}_{ji}^1 &= 0, \quad \bar{F}_{ij}^1 = \bar{g}_{i\alpha} \bar{F}_j^\alpha, \\ F_{i,j}^1 &= 0, \quad F_{i|j}^1 = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где " , " и " | " - знаки ковариантной производной в V_n и $\bar{V}_n$.

Свертывание (3.1) по индексам h, j и последующее сопряжение по i с учетом (2.6) дает нам:

$$\begin{aligned} \psi_i &= \frac{1}{n - 2k + 1} \left(\bar{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha - \Gamma_{i\alpha}^\alpha + \bar{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha - \Gamma_{i\alpha}^\alpha \right), \\ \phi_i &= -\frac{1}{2(k + 1)} \left(\bar{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha - \Gamma_{i\alpha}^\alpha \right), \end{aligned}$$

$$\sigma_i = \frac{1}{n-2k+1} \left(\bar{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha - \Gamma_{i\alpha}^\alpha + \bar{\Gamma}_{\bar{i}\alpha}^\alpha - \Gamma_{\bar{i}\alpha}^\alpha \right) + \frac{1}{2(k+1)} \left(\bar{\Gamma}_{\bar{i}\alpha}^\alpha - \Gamma_{\bar{i}\alpha}^\alpha \right).$$

Подставляя полученные выражения в (3.1), представим их в виде

$$\begin{aligned} \bar{T}_{ij}^h &= T_{ij}^h, \\ T_{ij}^h &= \Gamma_{ij}^h + p_{(i} \delta_{j)}^h + q_{(i} F_{j)}^h + r_{(i} F_{j)}^h, \\ p_i &= -\frac{1}{n-2k+1} \left(\Gamma_{i\alpha}^\alpha + \Gamma_{\bar{i}\alpha}^\alpha \right), \\ q_i &= \frac{1}{2(k+1)} \Gamma_{i\alpha}^\alpha, \\ r_i &= -\frac{1}{n-2k+1} \left(\Gamma_{i\alpha}^\alpha + \Gamma_{\bar{i}\alpha}^\alpha \right) - \frac{1}{2(k+1)} \Gamma_{\bar{i}\alpha}^\alpha. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Аналогичным образом выражаются компоненты $\bar{T}_{ij}^h$ в $\bar{V}_n$.

Отметим, что в этих уравнениях T_{ij}^h — нетензорный геометрический объект, инвариантный относительно $2F$ ПО основного типа псевдоримановых пространств с абсолютно параллельной f -структурой (типа параметров Томаса [6] в теории геодезических отображений). Его сохранение является необходимым и достаточным условием того, чтобы отображение псевдоримановых пространств с абсолютно параллельной f -структурой было $2F$ ПО основного типа.

2°. На основании (3.1) зависимость между компонентами тензоров Римана пространств V_n и $\bar{V}_n$, находящихся в $2F$ ПО основного типа, имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ijk}^h &= R_{ijk}^h + A_{ij} \delta_k^h - A_{ik} \delta_j^h + (A_{kj} - A_{jk}) \delta_i^h + \\ &+ B_{ij} F_k^h - B_{ik} F_j^h + (B_{kj} - B_{jk}) F_i^h + \\ &+ C_{ij} F_k^h - C_{ik} F_j^h + (C_{kj} - C_{jk}) F_i^h, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \psi_{i,j} - \psi_i \psi_j, \\ B_{ij} &= \phi_{i,j} - \phi_i \phi_j - \phi_i \phi_{\bar{j}}, \\ C_{ij} &= A_{ij} - B_{\bar{i}j}. \end{aligned}$$

В частности, ввиду (2.6)

$$A_{\bar{i}j} = 0, \quad B_{\bar{i}j} = -B_{ij}, \quad C_{\bar{i}j} = B_{ij}.$$

Результат свертывания (3.3) по индексам h, k и его последовательного сопряжения по индексам i и j дает нам систему уравнений относительно A_{ij}, B_{ij} , решая которую с учетом (2.7) находим:

$$A_{ij} = \frac{1}{n-2k-1} \left(\bar{R}_{ij} - R_{ij} + \bar{R}_{\bar{i}\bar{j}} - R_{\bar{i}\bar{j}} \right), \quad (3.4)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2(k+1)} \left(\bar{R}_{i\bar{j}} - R_{i\bar{j}} \right) \quad (3.5)$$

при $n-2k-1 \neq 0$. При выводе этих соотношений появилось ограничение

$$k = \frac{1}{2} Rg \|F_i^h\| \neq 1.$$

Подставим полученные выражения в (3.3) и представим их в форме

$$\bar{Q}_{ijk}^h = Q_{ijk}^h,$$

$$\begin{aligned} Q_{ijk}^h = & R_{ijk}^h - \frac{1}{n-2k-1} \left((\delta_k^h + F_k^2)(R_{ij} + R_{\bar{i}\bar{j}}) - \right. \\ & \left. - (\delta_j^h + F_j^2)(R_{ik} + R_{\bar{i}\bar{k}}) \right) - \\ & - \frac{1}{2(k+1)} \left(F_k^1 R_{i\bar{j}} - F_j^1 R_{i\bar{k}} + 2F_i^1 R_{k\bar{j}} + F_k^2 R_{i\bar{j}} - F_j^2 R_{i\bar{k}} \right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$n-2k-1 \neq 0, \quad k = \frac{1}{2} Rg \|F_i^h\| \neq 1.$$

Аналогичным образом выражаются компоненты $\bar{Q}_{ij}^h$ в $\bar{V}_n$. Отметим, что здесь Q_{ij}^h — тензорный геометрический объект, инвариантный относительно $2F$ ПО основного типа псевдоримановых пространств с абсолютно параллельной f -структурой (типа тензора голоморфно-проективной кривизны [2] в теории голоморфно-проективных отображений келеровых многообразий). Его сохранение является лишь необходимым условием того, чтобы отображение псевдоримановых пространств с абсолютно параллельной f -структурой было $2F$ ПО основного типа.

Итак, справедлива

Теорема 3.1. *Геометрические объекты (3.2) и (3.6) инвариантны относительно $2F$ ПО основного типа псевдоримановых пространств с абсолютно параллельной f -структурой.*

3°. Рассмотрим каноническое $2F$ ПО I типа между псевдоримановыми пространствами с абсолютно параллельной f -структурой (V_n, g_{ij}, F_i^h) и $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$. Его основные уравнения в общей по отображению системе координат имеют вид, [4]:

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{ij}^h &= \Gamma_{ij}^h + \phi_{(i} F_{j)}^h + \sigma_{(i} F_{j)}^h, \\ F_\alpha^h F_\beta^\alpha F_i^\beta + F_i^h &= 0, \\ F_{ij}^1 + F_{ji}^1 &= 0, \quad F_{ij}^1 = g_{i\alpha} F_j^{1\alpha}, \\ \bar{F}_{ij}^1 + \bar{F}_{ji}^1 &= 0, \quad \bar{F}_{ij}^1 = \bar{g}_{i\alpha} \bar{F}_j^{1\alpha}, \\ F_{i,j}^1 &= 0, \quad F_{i|j}^1 = 0.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Зависимость между векторами ϕ_i и σ_i ввиду (2.6) теперь такова:

$$\sigma_i = -\phi_{\bar{i}}.$$

Поэтому свертывание (3.7) по индексам h, j дает нам:

$$\sigma_i = -\frac{1}{2(k+1)} \left(\bar{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha - \Gamma_{i\alpha}^\alpha \right).$$

Это показывает, что вектор σ_i — градиентный и позволяет из (3.7) найти нетензорный геометрический объект, инвариантный относительно $2F$ ПО(I) псевдоримановых пространств с абсолютно параллельной f -структурой:

$$T_{ij}^I = \Gamma_{ij}^h + \frac{1}{2(k+1)} \left(\Gamma_{i\alpha}^\alpha F_j^h + \Gamma_{j\alpha}^\alpha F_i^h + \Gamma_{i\alpha}^\alpha F_j^2 + \Gamma_{j\alpha}^\alpha F_i^2 \right).\tag{3.8}$$

4°. На основании (3.7) и градиентности вектора σ_i зависимость между компонентами тензоров Римана пространств V_n и $\bar{V}_n$, находящихся в $2F$ ПО(I), имеет вид

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + B_{ij}^1 F_k^h - B_{ik}^1 F_j^h + (B_{kj} - B_{jk}) F_i^h + C_{ij}^2 F_k^h - C_{ik}^2 F_j^h,\tag{3.9}$$

где

$$B_{ij} = \phi_{i,j} - \phi_i \phi_j - \phi_i \phi_{\bar{j}}, \quad C_{ij} = -B_{ij}.$$

Далее аналогично тому, как это делалось в пункте 2°, получаем выражение для B_{ij} и с его помощью представляем (3.9) в виде

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{ij}^h &= Q_{ij}^h, \\ Q_{ij}^h &= R_{ijk}^h - \frac{1}{2(k+1)} \left(F_k^h R_{i\bar{j}}^h - F_j^h R_{i\bar{k}}^h + 2F_i^h R_{k\bar{j}}^h + \right. \\ &\quad \left. + F_k^h R_{i\bar{j}}^h - F_j^h R_{i\bar{k}}^h \right), \\ k &= \frac{1}{2} Rg \|F_i^h\| \neq 1, \end{aligned} \quad (3.10)$$

что свидетельствует об инвариантности тензора (3.10) относительно $2FPO(I)$. Справедлива

Теорема 3.2. *Геометрические объекты (3.8) и (3.10) инвариантны относительно $2FPO(I)$ псевдоримановых пространств с абсолютно параллельной f -структурой.*

5°. Рассмотрим каноническое $2FPO$ II типа между псевдоримановыми пространствами с абсолютно параллельной f -структурой (V_n, g_{ij}, F_i^h) и $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$. Его основные уравнения в общей по отображению системе координат имеют вид, [4]:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{ij}^h &= \Gamma_{ij}^h + \psi_i \left(\delta_j^h + F_j^h \right), \\ F_\alpha^h F_\beta^\alpha F_i^\beta + F_i^h &= 0, \\ F_{ij}^1 + F_{ji}^1 &= 0, \quad F_{ij}^1 = g_{i\alpha} F_j^\alpha, \\ \bar{F}_{ij}^1 + \bar{F}_{ji}^1 &= 0, \quad \bar{F}_{ij}^1 = \bar{g}_{i\alpha} \bar{F}_j^\alpha, \\ F_{i,j}^1 &= 0, \quad F_{i|j}^1 = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Поэтому свертывание (3.11) по индексам h, j дает нам:

$$\psi_i = -\frac{1}{n-2k+1} \left(\bar{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha - \Gamma_{i\alpha}^\alpha \right),$$

что говорит о градиентности вектора ψ_i и позволяет из (3.11) найти нетензорный геометрический объект, инвариантный относительно $2FPO(II)$ псевдоримановых пространств с абсолютно параллельной f -

структурой:

$${}^{II}T_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \frac{1}{n-2k+1} \left(\Gamma_{i\alpha}^\alpha \left(\delta_j^h + F_j^h \right) + \Gamma_{j\alpha}^\alpha \left(\delta_i^h + F_i^h \right) \right). \quad (3.12)$$

6°. На основании (3.11) и градиентности вектора ψ_i зависимость между компонентами тензоров Римана пространств V_n и $\bar{V}_n$, находящихся в $2FPO(II)$, имеет вид

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + A_{ij} \left(\delta_k^h + F_k^h \right) - A_{ik} \left(\delta_j^h + F_j^h \right), \quad (3.13)$$

где

$$A_{ij} = \psi_{i,j} - \psi_i \psi_j.$$

Отсюда получаем выражение для A_{ij} через тензоры R_{ij} и $\bar{R}_{ij}$ и с его помощью представляем (3.13) в виде

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{ij}^h &= Q_{ij}^h, \\ Q_{ij}^h &= R_{ijk}^h - \frac{1}{n-2k-1} \left(\left(\delta_k^h + F_k^h \right) R_{ij} - \left(\delta_j^h + F_j^h \right) R_{ik} \right), \\ n-2k-1 &\neq 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

что свидетельствует об инвариантности тензора (3.14) относительно $2FPO(II)$. Справедлива

Теорема 3.3. *Геометрические объекты (3.12) и (3.14) инвариантны относительно $2FPO(II)$ псевдоримановых пространств с абсолютно параллельной f -структурой.*

4. $2F$ -ПЛОСКИЕ ПСЕВДОРИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА С АБСОЛЮТНО ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ f -СТРУКТУРОЙ

1°. Будем называть псевдориманово пространство с абсолютно параллельной f -структурой $2F$ -плоским ($2F(I)$ -плоским или $2F(II)$ -плоским), если в нем $Q_{ijk}^h = 0$ ($Q_{ijk}^I = 0$ или $Q_{ijk}^{II} = 0$). Справедлива

Теорема 4.1. *Если псевдориманово пространство (V_n, g_{ij}, F_i^h) с абсолютно параллельной f -структурой является $2F$ -плоским, то его*

тензор Римана имеет вид

$$\begin{aligned}
 R_{ijk}^h = & \frac{R + \bar{\bar{R}}}{(n - 2k - 1)(n - 2k)} \left((\delta_k^h + F_k^2)(g_{ij} + F_{ij}^2) - \right. \\
 & \left. - (\delta_j^h + F_j^2)(g_{ik} + F_{ik}^2) \right) + \\
 & + \frac{\bar{\bar{R}}}{4k(k + 1)} \left(F_k^h F_{ij}^1 - F_j^h F_{ik}^1 + 2F_i^h F_{kj}^1 + F_k^2 F_{ij}^2 - F_j^2 F_{ik}^2 \right),
 \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned}
 R = R_\alpha^\alpha = \text{const}, \quad \bar{\bar{R}} = R_\beta^\alpha F_\alpha^\beta = \text{const}, \\
 n - 2k - 1 \neq 0, \quad k = \frac{1}{2} R g \|F_i^h\| \neq 1.
 \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть в (V_n, g_{ij}, F_i^h) имеет место $Q_{ijk}^h = 0$. Согласно (3.6) это означает, что

$$\begin{aligned}
 R_{ijk}^h = & \frac{1}{n - 2k - 1} \left((\delta_k^h + F_k^2)(R_{ij} + R_{\bar{i}\bar{j}}) - \right. \\
 & \left. - (\delta_j^h + F_j^2)(R_{ik} + R_{\bar{i}\bar{k}}) \right) + \\
 & + \frac{1}{2(k + 1)} \left(F_k^h R_{i\bar{j}}^1 - F_j^h R_{i\bar{k}}^1 + 2F_i^h R_{k\bar{j}}^1 + F_k^2 R_{i\bar{j}}^2 - F_j^2 R_{i\bar{k}}^2 \right), \\
 n - 2k - 1 \neq 0, \quad k = \frac{1}{2} R g \|F_i^h\| \neq 1.
 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Отсюда свертыванием с g^{ij} по индексам i, j находим

$$\begin{aligned}
 R_{hk} = & \frac{R + \bar{\bar{R}}}{n - 2k} g_{hk} + \left(\frac{R}{n - 2k} + \frac{n \bar{\bar{R}}}{2k(n - 2k)} \right) F_{hk}^2, \\
 R = R_\alpha^\alpha, \quad \bar{\bar{R}} = R_\beta^\alpha F_\alpha^\beta.
 \end{aligned} \quad (4.3)$$

В частности,

$$R_{hk}^{\bar{\bar{R}}} = -\frac{\bar{\bar{R}}}{2k} F_{hk}^2. \quad (4.4)$$

Теперь (4.2) с учетом (4.3) и (4.4) принимает вид (4.1).

2°. Пусть тензор Римана псевдориманова пространства с абсолютно параллельной f -структурой имеет вид (4.1). Убедимся, что в этом случае R и $\bar{R}$ — константы. Действительно, на основании дифференциального тождества Бианки заключаем, что $\bar{R}_{,m} = R_{,\bar{m}}$, поэтому ковариантное дифференцирование (4.4) по x^m с последующим свертыванием по h, m дает нам $\bar{R}_{,m} = 0$, то есть $\bar{R} = \text{const}$. С учетом этого ковариантное дифференцирование (4.3) по x^m с последующим свертыванием по h, m дает, соответственно, $R_{,m} = 0$ и, следовательно, $R = \text{const}$. $\square$

3°. Выясним, допускает ли $2F$ -плоское пространство нетривиальное $2F$ ПО основного типа. Справедлива

Теорема 4.2. *Всякое псевдориманово пространство (V_n, g_{ij}, F_i^h) с абсолютно параллельной f -структурой, тензор Римана которого задается формулами (4.1), допускает нетривиальное $2F$ ПО основного типа, причем его образ $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$ имеет структуру тензора Римана, аналогичную (4.1).*

Доказательство. Пусть в V_n тензор Римана имеет вид (4.1), тогда из (4.2) следует $Q_{ijk}^h = 0$. Как мы только что доказали, верно и обратное: из $Q_{ijk}^h = 0$ следует, что структура тензора Римана в таком пространстве имеет вид (4.1).

Предположим, что псевдориманово пространство V_n с метрическим тензором g_{ij} , абсолютно параллельной f -структурой F_i^h и тензором Римана (4.1) нам задано. Если существует $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$, на которое пространство V_n допускает $2F$ ПО основного типа, соответствующее векторам $\psi_i \neq 0$, $\phi_i \neq 0$, $\sigma_i \neq 0$, то ввиду инвариантности Q_{ijk}^h имеем $Q_{ijk}^h = \bar{Q}_{ijk}^h = 0$ и из (3.4), (3.5) и (2.6) следует

$$\psi_{i,j} = \bar{C}_1(\bar{g}_{ij} + \bar{F}_{ij}^2) - C_1(g_{ij} + F_{ij}^2) + \psi_i\psi_j, \quad (4.5)$$

$$\phi_{i,j} = \bar{C}_2\bar{F}_{ij}^1 - C_2F_{ij}^1 + \phi_i\phi_j + \phi_j\phi_i, \quad (4.6)$$

$$\sigma_i = \psi_i - \phi_{\bar{i}},$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{R_\alpha^\alpha + R_\beta^\alpha F_\gamma^\beta F_\alpha^\gamma}{(n-2k-1)(n-2k)}, & C_2 &= \frac{R_\beta^\alpha F_\gamma^\beta F_\alpha^\gamma}{4k(k+1)}, \\ \bar{C}_1 &= \frac{\bar{R}_\alpha^\alpha + \bar{R}_\beta^\alpha \bar{F}_\gamma^\beta \bar{F}_\alpha^\gamma}{(n-2k-1)(n-2k)}, & \bar{C}_2 &= \frac{\bar{R}_\beta^\alpha \bar{F}_\gamma^\beta \bar{F}_\alpha^\gamma}{4k(k+1)}, \end{aligned}$$

причем $C_1, C_2, \bar{C}_1, \bar{C}_2$ являются постоянными.

Далее ввиду (3.1) имеем

$$\bar{g}_{ij,k} = \psi_{(i}\bar{g}_{j)k} + 2\psi_k\bar{g}_{ij} + \phi_{(i}\bar{g}_{j)\bar{k}} + \sigma_{(i}\bar{g}_{j)\bar{k}} + 2\sigma_k\bar{g}_{i\bar{j}} \quad (4.7)$$

Эти уравнения представляют собой еще одну форму основных уравнений 2FПО основного типа, эквивалентную (3.1).

Совокупность уравнений (4.5), (4.6), (4.7) образует систему Коши в ковариантных производных первого порядка в V_n относительно $\bar{g}_{ij}(x)$, $\psi_i(x)$ и $\phi_i(x)$. Мы также должны требовать выполнения условий

$$\bar{g}_{i\alpha}F_j^\alpha + \bar{g}_{j\alpha}F_i^\alpha = 0. \quad (4.8)$$

Исследуем смешанную систему (4.5)–(4.8) в V_n .

При этих условиях ковариантная производная аффинора в $\bar{V}_n$ автоматически будет равна нулю:

$$F_{i|j}^h = 0.$$

Существование решения

$$\bar{g}_{ij}(x) \equiv \bar{g}_{ji}(x), \quad (\det \|\bar{g}_{ij}\| \neq 0), \quad \psi_i(x) \neq 0, \quad \phi_i(x) \neq 0 \quad (4.9)$$

системы уравнений (4.5)–(4.8) в псевдоримановом пространстве V_n с абсолютно параллельной f -структурой необходимо и достаточно, чтобы это пространство допускало 2FПО основного типа.

Условия интегрируемости (4.5)–(4.7) имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_\alpha R_{ijk}^\alpha &= \left(\bar{C}_1(\bar{g}_{ij} + \bar{F}_{ij}) - C_1(g_{ij} + \bar{F}_{ij}) + \psi_i\psi_j \right)_{,k} - \\ &\quad - \left(\bar{C}_1(\bar{g}_{ik} + \bar{F}_{ik}) - C_1(g_{ik} + \bar{F}_{ik}) + \psi_i\psi_k \right)_{,j}, \\ \phi_\alpha R_{ijk}^\alpha &= \left(\bar{C}_2\bar{F}_{ij} - C_2\bar{F}_{ij} + \phi_{\bar{i}}\phi_j + \phi_{\bar{j}}\phi_i \right)_{,k} - \\ &\quad - \left(\bar{C}_2\bar{F}_{ik} - C_2\bar{F}_{ik} + \phi_{\bar{i}}\phi_k + \phi_{\bar{k}}\phi_i \right)_{,j}, \\ \bar{g}_{\alpha j}R_{ikl}^\alpha + \bar{g}_{i\alpha}R_{jkl}^\alpha &= \left(\psi_{(i}\bar{g}_{j)k} + 2\psi_k\bar{g}_{ij} + \phi_{(i}\bar{g}_{j)\bar{k}} + \sigma_{(i}\bar{g}_{j)\bar{k}} + 2\sigma_k\bar{g}_{i\bar{j}} \right)_{,l} - \\ &\quad - \left(\psi_{(i}\bar{g}_{j)l} + 2\psi_l\bar{g}_{ij} + \phi_{(i}\bar{g}_{j)\bar{l}} + \sigma_{(i}\bar{g}_{j)\bar{l}} + 2\sigma_l\bar{g}_{i\bar{j}} \right)_{,k}. \end{aligned}$$

На основании (4.1) и (4.5)–(4.8) эти условия выполняются тождественно.

Далее, дифференцируя ковариантно в V_n соотношения (4.8) с учётом (4.7), убеждаемся, что первое дифференциальное продолжение условий (4.8) тоже выполняется тождественно.

Из теории дифференциальных уравнений известно, что смешанная система уравнений (4.5)–(4.8) имеет в псевдоримановом пространстве

V_n с абсолютно параллельной f -структурой, тензор Римана которого задается формулой (4.1), решение для любых начальных значениях искомых функций (4.9), удовлетворяющих в точке M_0 условиям (4.8). Это означает, что всякое псевдориманово пространство с абсолютно параллельной f -структурой, тензор Римана которого имеет вид (4.1), допускает нетривиальное $2F$ ПО основного типа, причем только на пространствах с такой же структурой тензора Римана, как было показано выше. $\square$

Доказанная теорема представляет собой аналог теоремы Бельтрами в теории геодезических отображений римановых пространств.

3°. В соответствии с данным выше определением $2F(I)$ -плоского пространства аналогично тому, как это сделано в предыдущих пунктах, доказываются следующие утверждения:

Теорема 4.3. *Если псевдориманово пространство (V_n, g_{ij}, F_i^h) с абсолютно параллельной f -структурой является $2F(I)$ -плоским, то его тензор Римана имеет вид*

$$R_{ijk}^h = \frac{R}{4k(k+1)} \left(F_j^h F_{ik}^1 - F_k^h F_{ij}^1 + 2F_i^h F_{jk}^1 + F_j^2 F_{ik}^2 - F_k^2 F_{ij}^2 \right), \quad (4.10)$$

где

$$R = R_\alpha^\alpha = \text{const}, \quad k = \frac{1}{2} R g \|F_i^h\| \neq 1.$$

Теорема 4.4. *Всякое псевдориманово пространство (V_n, g_{ij}, F_i^h) с абсолютно параллельной f -структурой, тензор Римана которого задается формулами (4.10), допускает нетривиальное $2F$ ПО(I), причем его образ $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$ имеет структуру тензора Римана, аналогичную (4.10).*

4°. Наконец, для $2F(II)$ -плоского пространства аналогично предыдущему доказываются справедливость следующих утверждений:

Теорема 4.5. *Если псевдориманово пространство (V_n, g_{ij}, F_i^h) с абсолютно параллельной f -структурой является $2F(II)$ -плоским, то его тензор Римана имеет вид*

$$R_{ijk}^h = \frac{R}{(n-2k-1)(n-2k)} \left(\left(\delta_k^h + F_k^2 \right) \left(g_{ij} + F_{ij}^2 \right) - \left(\delta_j^h + F_j^2 \right) \left(g_{ik} + F_{ik}^2 \right) \right), \quad (4.11)$$

∂de

$$R = R^\alpha_\alpha = \text{const}, \quad n - 2k - 1 \neq 0, \quad k = \frac{1}{2} Rg \|F_i^h\|.$$

Теорема 4.6. *Всякое псевдориманово пространство (V_n, g_{ij}, F_i^h) с абсолютно параллельной f -структурой, тензор Римана которого задается формулами (4.11), допускает нетривиальное $2F$ ПО(Π), причем его образ $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$ имеет структуру тензора Римана, аналогичную (4.11).*

5. МЕТРИКИ $2F$ -ПЛОСКИХ V_n С АБСОЛЮТНО ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ f -СТРУКТУРОЙ

1°. Ввиду ковариантного постоянства аффинора F из (4.1) следует, что $2F$ -плоское пространство является симметрическим, то есть в нем $R_{ijk,l}^h = 0$. Для симметрических пространств П. А. Широков получил формулу для восстановления метрического тензора в окрестности некоторой точки $M(x_0)$ пространства V_n

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \overset{\circ}{g}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s 2^s}{(2s+2)!} \overset{s}{m}_{ij}, \\ \overset{1}{m}_{ij} &= m_{ij}, \\ \overset{k+1}{m}_{ij} &= \overset{k}{m}_{\alpha i} \overset{\circ}{m}_{\beta j} \overset{\circ}{g}^{\alpha\beta}, \\ m_{ij} &= \overset{\circ}{R}_{i\alpha j\beta} y^\alpha y^\beta, \end{aligned}$$

где $\overset{\circ}{g}_{ij}$, $\overset{\circ}{g}^{\alpha\beta}$, $\overset{\circ}{R}_{i\alpha j\beta}$ — значение компонент метрического и обратного ему тензоров, а также тензора Римана в точке $M(x_0)$, (y^h) — римановы координаты с началом в точке $M(x_0)$.

Подставляя в эту формулу выражение компонент тензора Римана $2F$ -плоского пространства (4.1) и учитывая свойства аффинора (2.1) и (2.2), получаем метрический тензор $2F$ -плоского пространства в виде:

$$\begin{aligned} g_{ij}(y) &= \overset{\circ}{g}_{ij} + \\ &+ \frac{1}{4C_1(y + \bar{y})^2} \left((y_j + y_{\bar{j}}) (y_i + y_{\bar{i}}) - \left(\overset{\circ}{g}_{ij} + \overset{2\circ}{F}_{ij} \right) (y + \bar{y}) \right) \times \\ &\quad \times (1 + C_1(y + \bar{y}) - A) + \\ &+ \frac{1}{4C_2\bar{y}^2} \left(3y_{\bar{i}}y_{\bar{j}} - y_{\bar{i}}y_{\bar{j}} + \bar{y}\overset{2\circ}{F}_{ij} \right) (1 - C_2\bar{y} - B), \end{aligned}$$

$$n - 2k - 1 \neq 0, \quad k = \frac{1}{2} Rg \|F_i^h\| \neq 1,$$

где

$$A = \begin{cases} \operatorname{ch} (2C_1(y + \bar{y}))^{\frac{1}{2}}, & \text{при } C_1(y + \bar{y}) > 0, \\ \cos (2C_1(y + \bar{y}))^{\frac{1}{2}}, & \text{при } C_1(y + \bar{y}) < 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

$$B = \begin{cases} \cos (2C_2\bar{y})^{\frac{1}{2}}, & \text{при } C_2\bar{y} > 0, \\ \operatorname{ch} (2C_2\bar{y})^{\frac{1}{2}}, & \text{при } C_2\bar{y} < 0, \end{cases} \quad (5.2)$$

где C_1, C_2 – постоянные, имеющие вид:

$$C_1 = \frac{R_\alpha^\alpha + R_{\bar{\alpha}}^\alpha}{(n - 2k - 1)(n - 2k)}, \quad C_2 = \frac{R_{\bar{\alpha}}^\alpha}{4k(k + 1)},$$

$\overset{\circ}{g}_{ij}, \overset{2\circ}{F}_{ij}$ — компоненты тензоров g_{ij}, F_{ij} в точке $M(x_o)$, y^h — римановы координаты с началом в точке $M(x_o)$.

Аналогично получаем компоненты метрического тензора $2F(I)$ -плоского пространства в римановых координатах:

$$g_{ij}(y) = \overset{\circ}{g}_{ij} + \frac{1}{4C_2\bar{y}^2} \left(3y_i y_{\bar{j}} - y_{\bar{i}} y_j + \bar{y} \overset{2\circ}{F}_{ij} \right) (1 - C_2\bar{y} - B),$$

$$k = \frac{1}{2} Rg \|F_i^h\| \neq 1.$$

и $2F(II)$ -плоского пространства:

$$\begin{aligned} g_{ij}(y) = & \overset{\circ}{g}_{ij} + \\ & + \frac{1}{4C_1(y + \bar{y})^2} \left((y_j + y_{\bar{j}}) (y_i + y_{\bar{i}}) - \left(\overset{\circ}{g}_{ij} + \overset{2\circ}{F}_{ij} \right) (y + \bar{y}) \right) \times \\ & \times (1 + C_1(y + \bar{y}) - A), \end{aligned}$$

$$n - 2k - 1 \neq 0, \quad k = \frac{1}{2} Rg \|F_i^h\|,$$

где A, B те же, что в формулах (5.1)-(5.2).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Raad Kadem. О $2F$ -планарных отображениях пространств аффинной связности. *Abstracts of the Colloquium on Differential Geometry, Eger, Hungary*, 20–25, 1989.
- [2] Josef Mikes, Alena Vanzurova, Irina Hinterleitner. *Geodesic Mappings and Some Generalizations*. М.:Наука: Москва, 2009.
- [3] К. Yano. On a structure defined by a tensor field f of type $(1, 1)$ satisfying $f^3 + f = 0$. *Tensor*, (14):99–109, 1963.
- [4] Н. Г. Коновенко, И. Н. Курбатова, Е. Цвентух. $2F$ -планарные отображения псевдоримановых пространств с f -структурой. *Proc. Intern. Geom. Center*, 11(1):39–51, 2018.

- [5] Н.Г. Коновенко. $2F$ -планарные отображения римановых пространств, сохраняющих обобщенную f -структуру. *Лаптевские чтения: Сборник трудов Международного геометрического семинара имени Г. Ф. Лаптева, Пенза*, 59–64, 2004.
- [6] Н.С. Синюков. *Геодезические отображения римановых пространств*. М.:Наука: Москва, 1979.
- [7] А.П. Широков. Структуры на дифференцируемых многообразиях. *Итоги науки. Сер. Мат. Алгебра. Топол. Геом.* 1967, 127–188, 1969.

Коновенко Надежда Григорьевна

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

ОДЕССКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ ПИЩЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

ОНАПТ, ОДЕССА, УКРАИНА

Email: konovenko@ukr.net

ORCID: orcid.org/0000-0002-8631-0688

Курбатова Ирина Николаевна

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

ОДЕССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И. И. МЕЧНИКОВА

ОНУ, ОДЕССА, УКРАИНА

Email: irina.kurbatova27@gmail.com

ORCID: orcid.org/0000-0003-0215-6060