О 4-квазипланарных отображениях полукватернионных келеровых многообразий

И. Н. Курбатова

Abstract. Earlier we introduces a concept of a semi-quaternion structure on a manifold with affine connection generated by a couple of almost complex structures. We also investigated 4-quasiplanar mappings of spaces with semi-quaternion structures under various conditions of differential character. In the present article we continue study of 4-quasiplanar mappings of semi-quaternion *Kählerian* spaces. Geometrical objects being invariant under the considered mappings are constructed. The class of the semi-quaternion *Kählerian* spaces admitting a 4-quasiplanar mapping on a flat space (4-quasiplane) is allocated. Their tensor sign is received. It is proved that any 4-quasiplane semi-quaternion *Kählerian* space admits non-trivial 4-quasiplanar mappings (it is an analog of the theorem of Beltrami in the theory of geodetic mappings of Riemannian spaces). It is shown that the 4-quasiplane semi-quaternion Kählerian space represents a direct product of two *Kählerian* spaces of constant holomorphic curvature.

Аннотация. Ранее мы ввели в рассмотрение понятие полукватернионной структуры на пространстве аффинной связности, порожденной парой почти комплексных структур, коммутирующих друг с другом. Мы также исследовали 4-квазипланарные отображения пространств аффинной связности с полукватернионными структурами при различных условиях дифференциального характера. В настоящей статье продолжается изучение 4-квазипланарных отображений полукватернионных келеровых пространств. Строятся геометрические объекты, инвариантные относительно рассматриваемых отображений. Выделен класс полукватернионных келеровых пространств (4-квазиплоские), допускающих 4-квазипланарное отображение на плоское пространство. Получен их тензорный признак. Доказано, что любое 4-квазиплоское полукватернионное келерово пространство допускает нетривиальные 4-квазипланарные отображения (это аналог теоремы Бельтрами в теории геодезических отображений римановых пространств). Показано, что 4-квазиплоское полукватернионное келерово пространство представляет собой прямое произведение двух келеровых пространств постоянной голоморфной кривизны.

Ключевые слова: Риманово пространство, кватернионная структура, келерова структура

УДК 517.764

1. ВВЕДЕНИЕ

В современной дифференциальной геометрии интенсивно развивается теория диффеоморфизмов многообразий с аффинорными структурами различных типов.

В настоящей статье продолжается начатое нами в [4], [5], [6] изучение 4-квазипланарных отображений (4КПО) псевдо-римановых пространств с полукватернионной структурой.

Исследования носят локальный характер и проводятся в классе достаточно гладких функций.

Напомним, что *полукватернионной* [6] называется структура, которая порождается парой почти комплексных структур [3], коммутирующих между собой. Соответственно, *почти полукватернионным* называется псевдо-риманово пространство V_n с заданными на нем почти комплексными структурами $\overset{1}{F}$ и $\overset{2}{F}$, которые наряду с

$$\overset{1}{F}_i^\alpha \overset{1}{F}_\alpha^h = -\delta_i^h, \quad \overset{2}{F}_i^\alpha \overset{2}{F}_\alpha^h = -\delta_i^h \quad (1.1)$$

удовлетворяют условиям

$$\overset{1}{F}_i^\alpha \overset{2}{F}_\alpha^h = \overset{2}{F}_i^\alpha \overset{1}{F}_\alpha^h. \quad (1.2)$$

Отсюда следует, что тензор

$$\overset{3}{F}_i^h = \overset{1}{F}_i^\alpha \overset{2}{F}_\alpha^h,$$

определяет на V_n структуру почти произведения [7]

$$\overset{3}{F}_i^\alpha \overset{3}{F}_\alpha^h = \delta_i^h. \quad (1.3)$$

Связь между $\overset{1}{F}$, $\overset{2}{F}$, $\overset{3}{F}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \overset{1}{F}_i^\alpha \overset{2}{F}_\alpha^h &= \overset{2}{F}_i^\alpha \overset{1}{F}_\alpha^h = \overset{3}{F}_i^h, \\ \overset{2}{F}_i^\alpha \overset{3}{F}_\alpha^h &= \overset{3}{F}_i^\alpha \overset{2}{F}_\alpha^h = -\overset{1}{F}_i^h, \\ \overset{3}{F}_i^\alpha \overset{1}{F}_\alpha^h &= \overset{1}{F}_i^\alpha \overset{3}{F}_\alpha^h = -\overset{2}{F}_i^h. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Мы полагаем, что аффиноры $\overset{1}{F}$, $\overset{2}{F}$, на V_n определяют почти эрмитову структуру [3], то есть

$$\overset{1}{F}_{ij} = -\overset{1}{F}_{ji}, \quad \overset{2}{F}_{ij} = -\overset{2}{F}_{ji}, \quad \overset{1}{F}_{ij} = g_{i\alpha} \overset{1}{F}_j^\alpha, \quad \overset{2}{F}_{ij} = g_{i\alpha} \overset{2}{F}_j^\alpha. \quad (1.5)$$

Из (1.4) следует, что

$$\overset{3}{F}_{ij} = \overset{3}{F}_{ji}, \quad \overset{3}{F}_{ij} = g_{i\alpha} \overset{3}{F}_j^\alpha. \quad (1.6)$$

Как обычно, под *келеровой* структурой будем понимать полукватернионную структуру на V_n , для которой

$$\overset{s}{F}_{i,j}^h = 0, \quad s = 1, 2, 3.$$

Здесь $<, >$ — знак ковариантной производной в V_n .

Рассмотрим (псевдо-)римановы пространства (V_n, g_{ij}) и $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij})$ с полукватернионными келеровыми структурами $\overset{s}{F}, \overset{s}{\bar{F}}, s = 1, 2, 3$, находящиеся в 4КПО, сохраняющем структуру. Тогда в общей по отображению системе координат (x^i) при условиях (1.1)-(1.6) имеют место соотношения

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \sum_{s=0}^3 \overset{s}{q}_i(x) \overset{s}{F}_j^h(x), \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{F}_i^h &= \delta_i^h, & \overset{3}{F}_i^h &= \overset{1}{F}_i^\alpha \overset{2}{F}_\alpha^h, & \overset{s}{F}_i^h(x) &= \overset{s}{\bar{F}}_i^h(x), \\ \overset{s}{F}_{i,j}^h &= 0, & \overset{s}{F}_{i|j}^h &= 0, & s &= 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $\overset{s}{q}_i(x)$ — некоторые ковекторы; $(\cdot, \cdot)$ означает операцию симметрирования по соответствующим индексам; $<, >, <|>$ — знаки ковариантной производной в V_n и $\bar{V}_n$, соответственно.

Назовем 4-квазипланарной линией кривую L полукватернионного пространства $(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F})$, заданную в параметрической форме

$$x^h = x^h(t), \quad h = 1, 2, \dots, n,$$

вдоль которой функции $\lambda^h = \frac{dx^h}{dt}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\lambda^h(t)}{dt} + \Gamma_{\alpha\beta}^h(x) \lambda^\alpha(t) \lambda^\beta(t) = \lambda^\alpha \sum_{s=0}^3 \overset{s}{a}(t) \overset{s}{F}_\alpha^h,$$

где $\overset{s}{a}(t)$ — некоторые функции параметра t .

Эти кривые представляют собой аналог геодезических линий пространств аффинной связности и аналитически планарных кривых почти комплексных многообразий [7], [2].

Покажем, что образом каждой геодезической в $(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F})$ при 4КПО является 4-квазипланарная кривая в $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \overset{s}{\bar{F}})$.

Если L — геодезическая в V_n с параметрическими уравнениями

$$x^h = x^h(t), \quad h = 1, 2, \dots, n,$$

то вдоль нее $\lambda^h = \frac{dx^h}{dt}$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\lambda^h(t)}{dt} + \Gamma_{\alpha\beta}^h(x)\lambda^\alpha(t)\lambda^\beta(t) = \rho(t)\lambda^h(t).$$

В общей по 4КПО системе координат (x^i) кривая $\bar{L}$ пространства $\bar{V}_n$, являющаяся образом кривой L , определяется теми же параметрическими уравнениями $x^h = x^h(t)$, $h = 1, 2, \dots, n$, а соответствующие точки этих кривых имеют одинаковые значения параметра t . При этом если в дифференциальные уравнения геодезической L подставить $\Gamma_{\alpha\beta}^h$ из (1.7), то они примут вид

$$\frac{d\lambda^h(t)}{dt} + \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^h(x)\lambda^\alpha(t)\lambda^\beta(t) = \lambda^\alpha \sum_{s=0}^3 \bar{a}^s(t) \bar{F}_\alpha^s,$$

то есть $\bar{L}$ будет 4-квазипланарной в $\bar{V}_n$.

Аналогично проверяется, что аналитически планарные и 4-квазипланарные кривые V_n при 4КПО также переходят в 4-квазипланарные линии $\bar{V}_n$.

В [6] мы показали, что из зависимости между ковариантными производными $\overset{s}{F}$ в V_n и $\bar{V}_n$ с учетом (1.1)-(1.8) следует, что

$$\overset{\circ}{q}_i = \overset{1}{q}_\alpha \overset{1}{F}_i^\alpha = \overset{2}{q}_\alpha \overset{2}{F}_i^\alpha = \overset{3}{q}_\alpha \overset{3}{F}_i^\alpha \quad (1.9)$$

при $\overset{3}{F}_\alpha^\alpha \neq \pm n$.

Отметим, что $\overset{3}{F}_\alpha^\alpha = \pm n$ соответствует $\overset{3}{F}_i^h = \pm \delta_i^h$ и, следовательно, $\overset{1}{F}_i^h = \pm \overset{2}{F}_i^h$, то есть в этом случае полукватернионная келерова структура вырождается в классическую келерову [3].

2. СВОЙСТВА ПОЛУКВАТЕРНИОННЫХ КЕЛЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

2.1. Ввиду ковариантного постоянства структурных аффиноров в полукватернионном келеровом пространстве $(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F}_i^h)$ имеют место равенства:

$$\overset{s}{F}_{i,[kl]}^h = 0,$$

откуда с учетом тождества Риччи и (1.1)-(1.5) получаются свойства тензоров Римана и Риччи:

$$R_{\alpha i j k} F_h^\alpha = -R_{h \alpha j k} F_i^\alpha, \quad R_{\alpha i} F_h^\alpha = -R_{h \alpha} F_i^\alpha, \quad (2.10)$$

$$R_{\alpha i j k} F_h^\alpha = -R_{h \alpha j k} F_i^\alpha, \quad R_{\alpha i} F_h^\alpha = -R_{h \alpha} F_i^\alpha, \quad (2.11)$$

$$R_{\alpha i j k} F_h^\alpha = R_{h \alpha j k} F_i^\alpha, \quad R_{\alpha i} F_h^\alpha = R_{h \alpha} F_i^\alpha. \quad (2.12)$$

2.2. Поскольку $F_{i,j}^h = 0$, аффинорная структура F_i^h интегрируема [7], так что в рассматриваемой окрестности можно выбрать систему координат, называемую *адаптированной* (к аффинору), в которой F_i^h приводится к виду:

$$(F_i^h) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & -E_{n-m} \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

то есть

$$F_b^a = \delta_b^a, \quad F_B^A = \delta_B^A, \quad F_b^A = F_B^a = 0, \quad (2.14)$$

для $a, b = 1, 2, \dots, m$, $A, B = m+1, m+2, \dots, n$.

В частности,

$$F_\alpha^\alpha = 2m - n. \quad (2.15)$$

В [6] мы доказали, что келерово полукватернионное пространство (V_n, g_{ij}, F_i^h) приводимо, и формулы (1.4)-(1.6), записанные в адаптированной к F_i^h системе координат, дают нам

$$g_{ab} = g_{ab}(x^c), \quad g_{AB} = g_{AB}(x^C), \quad g_{aB}(x) = 0, \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} F_B^a &= F_b^A = 0, & F_b^a &= F_b^A = 0, \\ F_b^a &= -F_b^a = F_b^a, & F_B^A &= F_B^A = F_B^A, \end{aligned} \quad (2.17)$$

причем

$$\begin{aligned} F_c^a F_b^c &= -\delta_b^a, & g_{ac} F_b^c &= -g_{bc} F_a^c, & F_{b,c}^a &= 0, \\ F_C^A F_B^C &= -\delta_B^A, & g_{AC} F_B^C &= -g_{BC} F_A^C, & F_{B,C}^A &= 0. \end{aligned}$$

Это означает, что полукватернионное келерово пространство V_n представляет собой прямое произведение $V_n = V_m \times V_{n-m}$, где пространство $(V_m(x^a), g_{ab}(x^c))$ является обычным келеровым относительно аффинора $F_b^a(x^c)$, а пространство $(V_{n-m}(x^A), g_{AB}(x^C))$, соответственно, обычным келеровым относительно аффинора $F_A^B(x^C)$.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО 4КПО ПОЛУКВАТЕРНИОННЫХ КЕЛЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

3.1. Рассмотрим полукватернионные келеровы пространства

$$(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F}), \quad (\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{\overset{s}{F}}), \quad s = 1, 2, 3,$$

находящиеся в 4КПО, сохраняющем структуру. При этом полагаем, что наряду с (1.1)-(1.6) в $\bar{V}_n$ выполняются аналогичные (1.5), (1.6) равенства

$$\begin{aligned} \overset{1}{F}_{ij} &= -\overset{1}{F}_{ji}, & \overset{2}{F}_{ij} &= -\overset{2}{F}_{ji}, \\ \overset{1}{F}_{ij} &= \bar{g}_{i\alpha} \overset{1}{F}_j^\alpha, & \overset{2}{F}_{ij} &= \bar{g}_{i\alpha} \overset{2}{F}_j^\alpha, \\ \overset{3}{F}_{ij} &= \bar{F}_{ji}, & \overset{3}{F}_{ij} &= \bar{g}_{i\alpha} \overset{3}{F}_j^\alpha. \end{aligned}$$

Свертывание основных уравнений 4КПО (1.7) по индексам i, j с учетом (1.4), (1.9) дает нам

$$2(m+2)\overset{\circ}{q}_i = \bar{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha - \Gamma_{i\alpha}^\alpha. \quad (3.18)$$

Отсюда следует, что вектор $\overset{\circ}{q}_i$ градиентен.

Далее, ввиду (3.18) уравнения (1.7) можно представить в форме

$$\bar{T}_{ij}^h = T_{ij}^h,$$

где

$$T_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h - \frac{1}{2(m+2)} \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha Q_{ij}^{\beta h}, \quad (3.19)$$

$$Q_{ij}^{kh} = \delta_i^k \delta_j^h - F_i^k F_j^h - \overset{2}{F}_i^k \overset{2}{F}_j^h + \overset{3}{F}_i^k \overset{3}{F}_j^h. \quad (3.20)$$

Аналогично записываются компоненты $\bar{T}_{ij}^h$ в $\bar{V}_n$.

3.2. На основании (1.7) зависимость между компонентами тензоров Римана полукватернионных келеровых пространств

$$(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F}), \quad (\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{\overset{s}{F}}),$$

находящихся в 4КПО, имеет вид:

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + q_{\alpha[j} Q_{k]i}^{(h\alpha)}, \quad (3.21)$$

где

$$q_{ij} = \overset{\circ}{q}_{i,j} - \overset{\circ}{q}_\alpha \overset{\circ}{q}_\beta Q_{ij}^{\alpha\beta}, \quad (3.22)$$

$[\cdot, \cdot]$ обозначено альтернирование по соответствующим индексам.

Из градиентности $\overset{\circ}{q}_i$ очевидно, что $q_{ij} = q_{ji}$.

Свертывание (3.21) по индексам h, k дает нам

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + (n+4)q_{ij} - 2q_{\alpha\beta}Q_{ij}^{\alpha\beta} + (2m-n)q_{\alpha i}\overset{3}{F}_j^{\alpha}. \quad (3.23)$$

Отсюда с учетом градиентности $\overset{\circ}{q}_i$ находим, что

$$q_{\alpha i}\overset{3}{F}_j^{\alpha} = q_{\alpha j}\overset{3}{F}_i^{\alpha}$$

и, следовательно,

$$q_{\alpha\beta}\overset{3}{F}_i^{\alpha}\overset{3}{F}_j^{\beta} = q_{ij}, \quad q_{\alpha\beta}\overset{1}{F}_i^{\alpha}\overset{1}{F}_j^{\beta} = q_{\alpha\beta}\overset{2}{F}_i^{\alpha}\overset{2}{F}_j^{\beta}. \quad (3.24)$$

Теперь (3.23) принимают вид

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + nq_{ij} + 4q_{\alpha\beta}\overset{1}{F}_i^{\alpha}\overset{1}{F}_j^{\beta} + (2m-n)q_{\alpha i}\overset{3}{F}_j^{\alpha}. \quad (3.25)$$

Вычитая из (3.25) результат их свертывания с $\overset{1}{F}_k^i\overset{1}{F}_l^j$ по индексам i, j , получим

$$(n-4)\left(q_{ij} - q_{\alpha\beta}\overset{1}{F}_i^{\alpha}\overset{1}{F}_j^{\beta}\right) + (2m-n)\left(q_{\alpha j}\overset{3}{F}_i^{\alpha} + q_{\alpha\beta}\overset{2}{F}_i^{\alpha}\overset{1}{F}_j^{\beta}\right) = 0.$$

Аналогично, складывая (3.25), свернутые с $\overset{3}{F}_k^i$ по индексу i , с результатом свертывания (3.25) с $\overset{2}{F}_k^i\overset{1}{F}_l^j$ по индексам i, j , имеем

$$(2m-n)\left(q_{ij} - q_{\alpha\beta}\overset{1}{F}_i^{\alpha}\overset{1}{F}_j^{\beta}\right) + (n-4)\left(q_{\alpha j}\overset{3}{F}_i^{\alpha} + q_{\alpha\beta}\overset{2}{F}_i^{\alpha}\overset{1}{F}_j^{\beta}\right) = 0.$$

Из двух последних равенств, соответственно, находим

$$q_{ij} = q_{\alpha\beta}\overset{1}{F}_i^{\alpha}\overset{1}{F}_j^{\beta}, \quad q_{\alpha j}\overset{3}{F}_i^{\alpha} = -q_{\alpha\beta}\overset{2}{F}_i^{\alpha}\overset{1}{F}_j^{\beta}, \quad (3.26)$$

при $m \neq 2, n - m \neq 2$.

Наконец, (3.25) с учетом (3.26) дают нам

$$(\bar{R}_{\alpha j} - R_{\alpha j}) \left((n+4)\delta_i^{\alpha} - (2m-n)\overset{3}{F}_i^{\alpha} \right) = 4(m+2)(n-m+2)q_{ij}.$$

На основании полученных соотношений (3.21) можно представить в форме

$$\bar{T}_{ijk}^h = T_{ijk}^h,$$

где

$$T_{ijk}^h = R_{ijk}^h - \tilde{R}_{\alpha[j}Q_{k]i}^{h\alpha} - 2\tilde{R}_{\alpha k}\left(\overset{1}{F}_i^h\overset{1}{F}_j^{\alpha} - \overset{2}{F}_i^h\overset{2}{F}_j^{\alpha}\right), \quad (3.27)$$

$$\tilde{R}_{ij} = \frac{1}{4(m+2)(n-m+2)}R_{\alpha j}\left((n+4)\delta_i^{\alpha} - (2m-n)\overset{3}{F}_i^{\alpha}\right) \quad (3.28)$$

при $m \neq 2, n - m \neq 2$.

Аналогичным образом представляются в $\bar{V}_n$ компоненты $\bar{T}_{ijk}^h$.
Нами доказана

Теорема 3.3. *Геометрические объекты (3.19) и (3.27) инвариантны относительно 4КПО полукватернионных келеровых пространств.*

Объект (3.19) носит нетензорный характер и является аналогом известных параметров Томаса в теории геодезических отображений римановых пространств [7].

Его сохранение необходимо и достаточно для того, чтобы отображение между полукватернионными келеровыми пространствами было 4-квазипланарным.

Объект (3.27) — аналог тензора Вейля в теории геодезических отображений [7] и тензора голоморфно-проективной кривизны в теории HP -отображений келеровых пространств [1].

Сохранение объекта (3.27) — лишь необходимое условие для того, чтобы рассматриваемое отображение было 4-квазипланарным.

4. 4-КВАЗИПЛОСКИЕ ПОЛУКВАТЕРНИОННЫЕ КЕЛЕРОВЫ ПРОСТРАНСТВА.

4.1. Будем называть полукватернионные келеровы пространства, допускающие 4КПО на плоское пространство, *4-квазиплоскими*. Рассмотрим 4КПО полукватернионного келерова пространства $(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F})$ на плоское $\bar{V}_n = E_n$. Тогда из $\bar{R}_{ijk}^h = 0$ следует $\bar{T}_{ijk}^h = T_{ijk}^h = 0$ и, значит, (3.27) принимают вид:

$$R_{ijk}^h = \tilde{R}_{\alpha[j} Q_{k]i}^{h\alpha} + 2\tilde{R}_{\alpha k} \left(\overset{1}{F}_i^h \overset{1}{F}_j^\alpha - \overset{2}{F}_i^h \overset{2}{F}_j^\alpha \right). \quad (4.29)$$

Опуская здесь индекс h в V_n и свертывая результат с g^{ij} по индексам i, j , с учетом (3.28) получаем:

$$\begin{aligned} 4(n - m^2 + mn)R_{hk} + 4(2m - n)R_{\alpha k} \overset{3}{F}_h^\alpha - \\ - \left((n + 4)\overset{3}{R} - (2m - n)R \right) \overset{3}{F}_{hk} + \\ + \left((2m - n)\overset{3}{R} - (n + 4)R \right) g_{hk} = 0, \end{aligned} \quad (4.30)$$

где $R = R_\alpha^\alpha$ — скалярная кривизна V_n и $\overset{3}{R} = R_\beta^\alpha \overset{3}{F}_\alpha^\beta$.

Исключая из (4.30) и результата их свертывания с F_l^h по индексу h слагаемое $R_{\alpha k} \overset{3}{F}_h^\alpha$, находим:

$$4m(n-m)R_{hk} = \left(nR - (2m-n)\overset{3}{R}\right)g_{hk} - \left((2m-n)R - n\overset{3}{R}\right)\overset{3}{F}_{hk}. \quad (4.31)$$

Продифференцируем это равенство ковариантно по x^l :

$$4m(n-m)R_{hk,l} = \left(nR_{,l} - (2m-n)\overset{3}{R}_{,l}\right)g_{hk} - \left((2m-n)R_{,l} - n\overset{3}{R}_{,l}\right)\overset{3}{F}_{hk}. \quad (4.32)$$

Сравнивая результат поочередного свертывания (4.32) с g^{hl} и $\overset{3}{F}^{hl}$ по индексам h, l , обнаруживаем, что $R_{,k} = 0$ и $\overset{3}{R}_{,l} = 0$, то есть R и $\overset{3}{R}$ — константы.

Учитывая вышесказанное, из (4.31) и (3.28) получаем

$$\tilde{R}_{hk} = \left(C_1R - C_2\overset{3}{R}\right)g_{hk} - \left(C_2R - C_1\overset{3}{R}\right)\overset{3}{F}_{hk}, \quad (4.33)$$

где

$$C_1 = \frac{n^2 + 2n + 2m^2 - 2mn}{8m(n-m)(m+2)(n-m+2)},$$

$$C_2 = \frac{(2m-n)(n+2)}{8m(n-m)(m+2)(n-m+2)}$$

— константы при $m \neq 2, n-m \neq 2$.

Нами доказана

Теорема 4.2. *Тензор Римана 4-квазиплоского полукватернионного келлерова пространства $(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F})$ по необходимости имеет структуру*

$$R_{ijk}^h = \tilde{R}_{\alpha[j} Q_{k]i}^{h\alpha} + 2\tilde{R}_{\alpha k} \left(\overset{1}{F}_i^h \overset{1}{F}_j^\alpha - \overset{2}{F}_i^h \overset{2}{F}_j^\alpha \right),$$

$$\tilde{R}_{hk} = \left(C_1R - C_2\overset{3}{R}\right)g_{hk} - \left(C_2R - C_1\overset{3}{R}\right)\overset{3}{F}_{hk},$$

где

$$C_1 = \frac{n^2 + 2n + 2m^2 - 2mn}{8m(n-m)(m+2)(n-m+2)},$$

$$C_2 = \frac{(2m-n)(n+2)}{8m(n-m)(m+2)(n-m+2)}$$

— константы при $m \neq 2, n-m \neq 2$.

4.3. Если V_n — 4-квазиплоское полукватернионное пространство, то, в соответствии с теоремой 4.2, его тензор Римана имеет структуру (4.29), (4.33). Подставляя эти соотношения в выражение (3.27) для T_{ijk}^h , получаем что в V_n имеет место $T_{ijk}^h = 0$.

Пусть полукватернионное келерово пространство $(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F})$ допускает 4КПО на 4-квазиплоское полукватернионное келерово $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \overset{s}{F})$. Тогда в $\bar{V}_n$ тензор Римана имеет структуру, указанную в (4.29), (4.33) и, следовательно, $\bar{T}_{ijk}^h = 0$. В силу инвариантности, $T_{ijk}^h = \bar{T}_{ijk}^h = 0$ в V_n . Отсюда, в свою очередь, вытекают (4.29), (4.33).

Таким образом, справедлива

Теорема 4.4. *Если полукватернионное келерово пространство*

$$(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F})$$

допускает 4КПО на 4-квазиплоское полукватернионное келерово

$$(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \overset{s}{F}),$$

то тензор Римана V_n по необходимости удовлетворяет (4.29), (4.33).

Эта теорема по сути говорит о том, что класс полукватернионных келеровых пространств, тензор Римана которых имеет структуру (4.29), (4.33), замкнут относительно 4КПО.

4.5. Естественно возникает вопрос о том, допускает ли полукватернионное келерово пространство V_n , в котором имеют место (4.29), (4.33), нетривиальное 4КПО.

Предположим, что 4-квазиплоское полукватернионное келерово пространство $(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F})$ нам задано. Если существует полукватернионное келерово относительно той же аффинорной структуры пространство $\bar{V}_n$ с метрическим тензором $\bar{g}_{ij}(x)$, на которое пространство V_n допускает 4КПО соответствующее вектору $\overset{\circ}{q}_i \neq 0$, то, ввиду инвариантности T_{ijk}^h , имеем $T_{ijk}^h = \bar{T}_{ijk}^h = 0$. Тогда после свертывания (3.27) по h, k ввиду (3.22), (4.31), (4.33) следует, что

$$\overset{\circ}{q}_{i,j} - \overset{\circ}{q}_\alpha \overset{\circ}{q}_\beta Q_{ij}^{\alpha\beta} = (\bar{r}_1 \bar{g}_{ij} - r_1 g_{ij}) + (\bar{r}_2 \bar{F}_{ij} - r_2 F_{ij}), \quad (4.34)$$

где $\bar{r}_1, \bar{r}_2, r_1, r_2$ — некоторые константы.

Далее, ввиду (1.1)-(1.6), (1.8) и (1.9) основные уравнения 4КПО (1.7) можно представить в эквивалентной форме:

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\overset{\circ}{q}_k \bar{g}_{ij} + 2\overset{\circ}{q}_\alpha F_k^\alpha \bar{F}_{ij}^3 + \overset{\circ}{q}_\alpha \bar{g}_{\beta k} Q_{(ij)}^{\alpha\beta}. \quad (4.35)$$

Совокупность уравнений (4.34), (4.35) образует систему Коши в ковариантных производных первого порядка в V_n относительно $\bar{g}_{ij}(x)$ и $\overset{\circ}{q}_k$. Кроме этого в $\bar{V}_n$ мы также должны требовать выполнения условий

$$\begin{aligned} \bar{g}_{i\alpha} F_j^\alpha + \bar{g}_{j\alpha} F_i^\alpha &= 0, \\ \bar{g}_{i\alpha} F_j^\alpha + \bar{g}_{j\alpha} F_i^\alpha &= 0, \\ \bar{g}_{i\alpha} F_j^\alpha - \bar{g}_{j\alpha} F_i^\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Исследуем смешанную систему (4.34), (4.35), (4.36) в V_n . Заметим, что при этих условиях в $\bar{V}_n$ автоматически следует $\bar{F}_{k|l}^i \equiv 0$. Существование решения

$$\bar{g}_{ij}(x) \equiv \bar{g}_{ji}(x), \quad (\det \|\bar{g}_{ij}\| \neq 0), \quad \overset{\circ}{q}_k(x) \neq 0 \quad (4.37)$$

системы уравнений (4.34), (4.35), (4.36) в 4-квазиплоском полукватернионном келеровом пространстве V_n необходимо и достаточно, чтобы это пространство допускало 4КПО.

Условия интегрируемости (4.34) и (4.35) имеют вид:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{q}_\alpha R_{ijk}^\alpha - \overset{\circ}{q}_{\alpha,k} \overset{\circ}{q}_\beta Q_{ij}^{\alpha\beta} - \overset{\circ}{q}_\alpha \overset{\circ}{q}_{\beta,k} Q_{ij}^{\alpha\beta} = \\ + \overset{\circ}{q}_{\alpha,j} \overset{\circ}{q}_\beta Q_{ik}^{\alpha\beta} + \overset{\circ}{q}_\alpha \overset{\circ}{q}_{\beta,j} Q_{ik}^{\alpha\beta} = \bar{g}_{\alpha[j,k]} \left(\bar{r}_1 \delta_i^\alpha + \bar{r}_2 F_i^\alpha \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\alpha j} R_{ikl}^\alpha + \bar{g}_{i\alpha} R_{jkl}^\alpha = 2\bar{g}_{ij,[l} \overset{\circ}{q}_{k]} + 2\overset{\circ}{q}_{\alpha,[l} F_{k]}^\alpha \bar{F}_{ij}^3 + \\ + 2F_j^\beta \bar{g}_{\beta i,[l} F_{k]}^\alpha \overset{\circ}{q}_\alpha + \overset{\circ}{q}_{\alpha,[l} \bar{g}_{k]\beta} Q_{(ij)}^{\alpha\beta} + \overset{\circ}{q}_\alpha \bar{g}_{\beta[k,l]} Q_{(ij)}^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Ввиду (4.29), (4.33), (4.34), (4.35), эти условия интегрируемости выполняются тождественно.

Дифференцируя ковариантно в V_n (4.36) и используя (4.35), убеждаемся, что первое дифференциальное продолжение условий (4.37) выполняется.

Из вышесказанного и из теории дифференциальных уравнений следует, что смешанная система уравнений (4.34), (4.35), (4.36) имеет в 4-квазиплоском полукватернионном келеровом пространстве V_n решение

для любых начальных значений искомых функций (4.37), удовлетворяющих в точке M_0 условиям (4.36).

Итак, нами доказана

Теорема 4.6. *Любое 4-квазиплоское полукватернионное келерово пространство допускает нетривиальные 4КПО.*

Две последние теоремы представляют собой аналог теоремы Бельтрами в теории геодезических отображений римановых пространств.

5. СТРОЕНИЕ 4-КВАЗИПЛОСКИХ ПОЛУКВАТЕРНИОННЫХ КЕЛЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Рассмотрим тензор Римана 4-квазиплоского полукватернионного келерова пространства

$$R_{ijk}^h = \tilde{R}_{\alpha[j} Q_{k]i}^{h\alpha} + 2\tilde{R}_{\alpha k} \left(\overset{1}{F}_i^h \overset{1}{F}_j^\alpha - \overset{2}{F}_i^h \overset{2}{F}_j^\alpha \right),$$

$$\tilde{R}_{hk} = \left(C_1 R - C_2 \overset{3}{R} \right) g_{hk} - \left(C_2 R - C_1 \overset{3}{R} \right) \overset{3}{F}_{hk}$$

в адаптированной к аффинору $\overset{3}{F}$ системе координат. Тогда, как указывалось ранее, имеем

$$\left(\overset{3}{F}_i^h \right) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & -E_{n-m} \end{pmatrix},$$

$$\overset{3}{F}_b^a = \delta_b^a, \quad \overset{3}{F}_B^A = \delta_B^A, \quad \overset{3}{F}_b^A = \overset{3}{F}_B^a = 0,$$

$$g_{ab} = g_{ab}(x^c), \quad g_{AB} = g_{AB}(x^C), \quad g_{aB}(x) = 0,$$

$$\overset{1}{F}_B^a = \overset{1}{F}_b^A = 0, \quad \overset{2}{F}_B^a = \overset{2}{F}_b^A = 0,$$

$$\overset{2}{F}_b^a = -\overset{1}{F}_b^a = F_b^a, \quad \overset{2}{F}_B^A = \overset{1}{F}_B^A = F_B^A,$$

$$F_c^a F_b^c = -\delta_b^a, \quad g_{ac} F_b^c = -g_{bc} F_a^c, \quad F_{b,c}^a = 0,$$

$$F_C^A F_B^C = -\delta_B^A, \quad g_{AC} F_B^C = -g_{BC} F_A^C, \quad F_{B,C}^A = 0,$$

где $a, b = 1, 2, \dots, m$, $A, B = m+1, m+2, \dots, n$.

Учитывая все это, при $h = a, i = b, j = c, k = d$ получим, что

$$R_{bcd}^a = C_3 \left(\delta_{[c}^a g_{d]b} + \overset{1}{F}_{[c}^a \overset{1}{F}_{d]b} + 2\overset{1}{F}_b^a \overset{1}{F}_{cd} \right), \quad (5.38)$$

а при $h = A, i = B, j = C, k = D$ — что

$$R_{BCD}^A = C_4 \left(\delta_{[C}^A g_{D]B} + F_{[c}^a F_{d]b} + 2F_{B}^A F_{cd} \right), \quad (5.39)$$

где C_3, C_4 — некоторые константы. Остальные компоненты тензора Римана равны нулю.

Соотношения (5.38) свидетельствуют о том, что компонента V_m представляет собой классическое келерово пространство постоянной голоморфной кривизны [1] относительно аффинора $F_b^a(x^c)$.

Аналогично (5.39) говорит о том, что компонента V_{n-m} представляет собой классическое келерово пространство постоянной голоморфной кривизны относительно аффинора $F_B^A(x^C)$.

Нами доказана

Теорема 5.1. *4-квазиплоское полукватернионное келерово пространство $(V_n, g_{ij}(x^i), \overset{s}{F}(x^i))$ есть прямое произведение $V_n = V_m \times V_{n-m}$, где $(V_m(x^a), g_{ab}(x^c), \overset{1}{F}_b^a(x^c))$ является келеровым относительно аффинора $\overset{1}{F}_b^a(x^c)$ пространством постоянной голоморфной кривизны, а $(V_{n-m}(x^A), g_{AB}(x^C), \overset{1}{F}_A^B(x^C))$ — соответственно, келеровым относительно аффинора $\overset{1}{F}_A^B(x^C)$ пространством постоянной голоморфной кривизны.*

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье мы решаем задачи, традиционные для любого типа отображений аффинносвязных и римановых пространств, а именно, построение геометрических объектов, инвариантных относительно рассматриваемых отображений, и нахождение классов пространств, их допускающих.

Мы построили геометрические объекты, инвариантные относительно 4-квазипланарных отображений полукватернионных келеровых пространств.

Один из них T_{ij}^h носит нетензорный характер (типа проективных параметров Томаса в теории геодезических отображений римановых пространств), в чем состоит неудобство его применения. Сохранение этого объекта является необходимым и достаточным условием того, чтобы отображение одного полукватернионного келерова пространства на другое было 4-квазипланарным.

Другой объект T_{ijk}^h — тензорный (типа тензора Вейля в теории геодезических отображений римановых пространств или тензора голоморфно-проективной кривизны в теории голоморфно-проективных отображений келеровых пространств). Его сохранение является лишь необходимым условием того, чтобы соответствие между двумя полукватернионными келеровыми пространствами было 4-квазипланарным.

Мы выделили класс пространств, названных 4-квазиплоскими, которые допускают 4-квазипланарное отображение на плоское пространство. С помощью объекта T_{ijk}^h получен внутренний тензорный признак этих пространств и доказано, что любое 4-квазиплоское пространство допускает нетривиальные 4-квазипланарные отображения на другие 4-квазиплоские пространства (это аналог теоремы Бельтрами из теории геодезических отображений римановых пространств).

Показано, что 4-квазиплоское пространство представляет собою прямое произведение двух келеровых пространств постоянной голоморфной кривизны.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. Mikeš, A. Vanžurová, and I. Hinterleitner. *Geodesic mappings and some generalizations*. Olomouc: Palacký University, Faculty of Science, 2009.
- [2] T. Otsuki and Y. Tashiro. On curves in kaehlerian spaces. *J. Okayama Univ.*, 4:57–78, 1954.
- [3] Д. В. Беклемишев. Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой. In *Итоги науки: Геометрия*, pages 165–212. М.: ВИНТИ, 1965.
- [4] Курбатова И. Н. О 4-квазипланарных отображениях почти кватернионных многообразий. *Известия ВУЗов. Математика.*, (1):75–78, 1986.
- [5] Курбатова И. Н. О диффеоморфизмах почти кватернионных многообразий. *Мат. Студії*, 40(1):95–103, 2013.
- [6] Курбатова И. Н. 4-квазипланарные отображения почти кватернионных и полукватернионных многообразий. *Труды международного геометрического центра*, 8(1):63–73, 2015.
- [7] Синюков Н. С. *Геодезические отображения римановых пространств*. М.: Наука, 1979.

Поступило в редакцию 28 марта 2016, принято к печати 12 мая 2016.

Ирина Николаевна Курбатова

ОНУ, ОДЕССА, УКРАИНА

Email: irina.kurbatova27@gmail.com