О “шестиугольных” решениях некоторых уравнений в частных производных

А. М. Шелехов

Abstract. For some famous PDE we find the solutions corresponded to hexagonal three-webs.

Аннотация. Для некоторых известных уравнений в частных производных найдены решения, которым соответствует шестиугольная три-ткань.

1. Введение. Всякое решение

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

дифференциального уравнения определяет на плоскости переменных x, y три-ткань W — три семейства линий

$$x = \text{const}, \quad y = \text{const}, \quad f(x, y) = \text{const},$$

см. [1]. Это дает возможность, с одной стороны, использовать геометрию три-тканей для описания свойств решений дифференциальных уравнений, с другой — классифицировать три-ткани по типу решений. Уравнение (1) связывает параметры x, y и z линий три-ткани W , проходящих через одну точку, и называется уравнением этой ткани. Функция f называется *функцией ткани* W .

Самые простые три-ткани — параллельные — образованы семействами параллельных прямых. Эквивалентные (локально диффеоморфные) им три-ткани называются параллелизуемыми или регулярными. Регулярные три-ткани (и только они) допускают максимальную (трехпараметрическую) группу автоморфизмов, [4]. Другая их характеристика состоит в том, что на них замыкаются конфигурации Томсена (T), изображенные на рис. 1.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, криволинейная три-ткань, регулярная три-ткань, конфигурация Томсена на три-ткани, шестиугольная конфигурация

Здесь линии первого, второго и третьего семейств ткани изображаются вертикальными, горизонтальными и наклонными линиями соответственно. При этом вертикальные линии отмечены параметрами x_α , горизонтальные — параметрами y_α , наклонные — параметрами z_α . Строится фигура T , например, следующим образом. Берем две произвольные линии x_1 и y_1 из первого и второго семейств, затем достаточно близко к точке их пересечения проводим наклонные линии z_1 и z_2 . Через получившиеся точки пересечения проводим вертикальные и горизонтальные линии x_2 и y_2 , x_3 и y_3 , как показано на рис. 1. Получим точки A и B . Полученная конфигурация называется *фигурой Томсена* или T . Если точки A и B лежат на одной линии третьего семейства ткани, то говорят, что фигура T замыкается.

Рис. 1.

В частности, если линии x_2 , y_2 и z_2 проходят через одну точку, то конфигурация Томсена называется *шестиугольной* конфигурацией или *фигурой H*. Поэтому регулярные ткани называют еще *шестиугольными*.

Известно [1], [4], что уравнение (1) определяет регулярную три-ткань тогда и только тогда, когда оно имеет вид

$$z = f(\alpha(x) + \beta(y)). \quad (2)$$

В этой статье мы рассматриваем некоторые известные уравнения в частных производных и ищем их решения вида (2). Такие решения можно назвать “шестиугольными”. Рассмотрены уравнение Эйлера для однородных функций, уравнение Лапласа, уравнение теплопроводности и уравнение колебания.

В некотором смысле эта статья дополняет работы [2], [3], в которых рассматривались три-ткани, определяемые обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Все рассматриваемые в работе функции считаются вещественно-аналитическими.

2. Пусть f — дифференцируемая однородная функция степени k . Тогда f удовлетворяет известному уравнению Эйлера

$$xf_x + yf_y = kf. \quad (3)$$

С другой стороны, пусть f имеет вид (2). Тогда

$$f_x = f'\alpha', \quad f_y = f'\beta', \quad (4)$$

где штрих обозначает производную по аргументу $\theta = \alpha + \beta$.

Подставляя в (3), получим

$$xf'\alpha'(x) + yf'\beta'(y) = kf,$$

откуда следует

$$d \ln f = k \frac{d(\alpha + \beta)}{x\alpha'(x) + y\beta'(y)}. \quad (5)$$

Поэтому,

$$\frac{k}{x\alpha'(x) + y\beta'(y)} = \varphi(\alpha + \beta),$$

где φ — некоторая гладкая функция.

Дифференцируя последнее равенство по x и y находим отношение полученных производных:

$$\frac{x\alpha''(x)}{\alpha'(x)} = \frac{y\beta''(y)}{\beta'(y)}.$$

Левая часть этого равенства зависит только от x , правая — только от y . Следовательно, это отношение есть постоянная, обозначим ее c . Тогда после интегрирования получим:

$$\alpha'(x) = ax^c, \quad \beta'(y) = by^c,$$

где a и b — постоянные. Подставляя в (5), найдем f и уравнение рассматриваемой три-ткани:

$$z = p(ax^{c+1} + by^{c+1})^{\frac{k}{c+1}}, \quad (6)$$

где p — постоянная. Таким образом, доказана

Теорема 1. *Решение уравнения (3) имеет вид (2) тогда и только тогда, когда f приводится к виду (6).*

При изоморфизме $x^{c+1} \rightarrow \bar{x}$, $y^{c+1} \rightarrow \bar{y}$, $z^{c+1} \rightarrow \bar{z}$ уравнение (6) переходит в более простое:

$$\bar{z} = p(a\bar{x} + b\bar{y})^k.$$

3. Найдем подкласс регулярных три-тканей в классе тканей, определяемых гармоническими функциями. Пусть f имеет вид (2) и удовлетворяет уравнению

$$f_{xx} + f_{yy} = 0. \quad (7)$$

Из уравнений (4) вытекают равенства

$$f_{xx} = f''(\alpha')^2 + f'\alpha'', \quad f_{yy} = f''(\beta')^2 + f'\beta''.$$

В результате уравнение (7) примет вид

$$f''((\alpha')^2 + (\beta')^2) + f'(\alpha'' + \beta'') = 0.$$

Это равенство перепишем в виде

$$\alpha'' + \beta'' = ((\alpha')^2 + (\beta')^2) g(\alpha + \beta), \quad (8)$$

где обозначено

$$g(\alpha + \beta) = -\frac{f''}{f'}. \quad (9)$$

Продифференцировав равенство (8) по x , а затем по y , придем к уравнению

$$\alpha' \beta' (g''((\alpha')^2 + (\beta')^2) + 2g'\alpha'' + 2g'\beta'') = 0.$$

Так как $\alpha(x)$ и $\beta(y)$ не являются постоянными, то $\alpha' \beta' \neq 0$. Приравняв к нулю выражение в скобках, с учетом (8) получим уравнение $g'' + 2gg' = 0$, или $g'' + (g^2)' = 0$. Отсюда $g' + g^2 = c$, где c — постоянная.

В случае $c = a^2$ получим решение $g = -a \coth a(b - \theta)$, где b — постоянная.

В случае $c = -a^2$ получим решение $g = a \tanh a(b - \theta)$.

В случае $c = 0$ получим решение $g = (b + \theta)^{-1}$.

В первом случае равенство (8) примет вид:

$$(\alpha + \beta)'' \tanh a(b - \alpha - \beta) = -a((\alpha')^2 + (\beta')^2).$$

Тейлоровское разложение функции $\tanh a(b - \alpha - \beta)$ существенно содержит произведения вида $\alpha(x)\beta(y)$. В правой части таких слагаемых нет. Следовательно, последнее равенство возможно только в случае $(\alpha + \beta)'' = 0$, $(\alpha')^2 + (\beta')^2 = 0$, но тогда ткань не существует.

Точно так же рассуждаем и во втором случае.

В третьем случае равенство (8) принимает вид:

$$(\alpha + \beta)''(b + \alpha + \beta) = (\alpha')^2 + (\beta')^2. \quad (10)$$

Продифференцировав его по x и y , получим

$$\alpha' \beta''' + \alpha''' \beta' = 0. \quad (11)$$

Отсюда

$$\frac{\alpha'''}{\alpha'} = -\frac{\beta'''}{\beta'} = q = \text{const.}$$

Предположим сначала, что третьи производные не нули и пускай $q = -p^2$. Тогда решения этих уравнений имеют вид:

$$\alpha = \frac{r}{p} \cos px + \frac{s}{p} \sin px, \quad \beta = \frac{u}{p} \cosh py + \frac{v}{p} \sinh py. \quad (12)$$

Здесь r, s, u, v — постоянные.

Подставим найденные решения в (10) и учтем, что

$$\alpha''\beta + \alpha\beta'' = \alpha\beta \left(\frac{\alpha''}{\alpha} + \frac{\beta''}{\beta} \right) \alpha\beta(-p^2 + p^2) = 0.$$

После преобразований получим:

$$bp(-r \cos px - s \sin px + u \cosh py + v \sinh py) + u^2 - v^2 = r^2 + s^2.$$

Отсюда следует, что $b = 0$ и

$$u = d \cosh \beta_0, \quad v = d \sinh \beta_0, \quad r = \cos \alpha_0, \quad s = d \sin \alpha_0.$$

В результате получаем:

$$\alpha = \frac{d}{p} \cos(\alpha_0 - px), \quad \beta = \frac{d}{p} \cosh(\beta_0 + py). \quad (13)$$

Найдем теперь f . В рассматриваемом случае равенство (9) (с учетом $b = 0$) принимает вид:

$$\frac{f''}{f'} = -\theta^{-1}.$$

Интегрируя, находим

$$f = c \ln \theta + c_1.$$

Поставляя сюда $\theta = \alpha + \beta$ и учитывая (13), окончательно получаем:

$$f = c \ln(\cos(\alpha_0 - px) + \cosh(\beta_0 + py)) + \bar{c}. \quad (14)$$

4. Рассмотрим исключённый случай

$$\alpha''' = \beta''' = 0. \quad (15)$$

Тогда

$$\alpha = \alpha_0 x^2 + 2\alpha_1 x + \alpha_2, \quad \beta = \beta_0 y^2 + 2\beta_1 y + \beta_2.$$

Подставляя в (10) и приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях, получим систему соотношений:

$$\begin{aligned} 2\alpha_0(\alpha_0 + \beta_0) &= 4\alpha_0^2, & 2\beta_0(\alpha_0 + \beta_0) &= 4\beta_0^2, \\ 4\alpha_1(\alpha_0 + \beta_0) &= 8\alpha_0\alpha_1, & 4\beta_1(\alpha_0 + \beta_0) &= 8\beta_0\beta_1, \end{aligned}$$

$$(b + \alpha_2 + \beta_2)(\alpha_0 + \beta_0) = 2(\alpha_1^2 + \beta_1^2).$$

Эти соотношения сводятся к следующим:

$$\alpha_0 = \beta_0, \quad \alpha_0(b + \alpha_2 + \beta_2) = \alpha_1^2 + \beta_1^2.$$

Из последнего соотношения выражаем α_0 и тогда

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{b + \alpha_2 + \beta_2} x^2 + 2\alpha_1 x + \alpha_2, \\ \beta &= \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{b + \alpha_2 + \beta_2} y^2 + 2\beta_1 y + \beta_2. \end{aligned} \tag{16}$$

Далее находим f , интегрируя (9) при $g = (b + \theta)^{-1}$. Получим

$$f = c \ln(b + \theta) + c_1,$$

или, в силу (16),

$$f = c \ln \left(\frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{b + \alpha_2 + \beta_2} (x^2 + y^2) + 2\alpha_1 x + 2\beta_1 y + \alpha_2 + \beta_2 + b \right) + c_1.$$

Обозначим $\alpha_2 + \beta_2 + b = \bar{b}$, тогда

$$f = c \ln \left((\alpha_1^2 + \beta_1^2)(x^2 + y^2) + 2\alpha_1 \bar{b}x + 2\beta_1 \bar{b}y + \bar{b}^2 \right) + \bar{c}.$$

Положим $\alpha_1 = d \cos \varphi$ и $\beta_1 = d \sin \varphi$. Тогда

$$f = c \ln \left(d^2(x^2 + y^2) + 2d\bar{b}x \cos \varphi + 2d\bar{b}y \sin \varphi + \bar{b}^2 \right) + \bar{c}.$$

или

$$f = c \ln \left(x^2 + y^2 + 2\tilde{b}x \cos \varphi + 2\tilde{b}y \sin \varphi + \tilde{b}^2 \right) + \tilde{c}.$$

Окончательно получаем:

$$f = c \ln \left((x + \tilde{b} \cos \varphi)^2 + (y + \tilde{b} \sin \varphi)^2 \right) + \tilde{c}. \tag{17}$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Криволинейная три-ткань, определяемая гармонической функцией, является регулярной тогда и только тогда, когда эта функция имеет вид (14) или (17).*

5. Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}. \quad (18)$$

Как и выше, будем искать решения вида (2):

$$u = f(\alpha(x) + \beta(t)). \quad (2')$$

Для них уравнение (18) примет вид:

$$f' \beta' = a^2 (f''(\alpha')^2 + f' \alpha'')$$

или

$$\beta'(t) = a^2 \left(\frac{f''}{f'}(\theta)(\alpha'(x))^2 + \alpha''(x) \right). \quad (19)$$

Продифференцируем это уравнение по x , затем по t . Так как $\alpha' \neq 0$ и $\beta' \neq 0$, получим

$$\left(\frac{f''}{f'} \right)'' (\alpha'(x))^2 + 2 \left(\frac{f''}{f'} \right)' \alpha'' = 0$$

или

$$\frac{g'(\theta)}{g(\theta)} + 2 \frac{\alpha''(x)}{(\alpha'(x))^2} = 0, \quad (20)$$

где обозначено

$$g = \left(\frac{f''}{f'} \right)'. \quad (21)$$

Поскольку слагаемые в уравнении (20) зависят от разных аргументов, то они являются постоянными:

$$\frac{g'(\theta)}{g(\theta)} = c, \quad 2 \frac{\alpha''(x)}{(\alpha'(x))^2} = -c.$$

Интегрируя, получим:

$$g = \left(\frac{f''}{f'} \right)' = c_1 e^{c\theta}, \quad (22)$$

откуда

$$\frac{f''}{f'} = \bar{c}_1 e^{c\theta} + c_2, \quad (23)$$

где $\bar{c}_1 = c_1 c^{-1}$, и

$$\alpha'(x) = \left(\frac{c}{2} x + c_3 \right)^{-1}, \quad (24)$$

что дает

$$\alpha(x) = 2c^{-1} \ln \left(p \left(\frac{c}{2} x + c_3 \right) \right), \quad (25)$$

где c_3 и p — постоянные.

С учетом (23)-(25) уравнение (19) примет вид:

$$\beta'(t) = a^2 p^2 \bar{c}_1 e^{c\beta(t)} + a^2 \frac{c_2 - \frac{c}{2}}{(\frac{c}{2}x + c_3)^2}. \quad (26)$$

Правая часть не зависит от x при условии

$$c_2 - \frac{c}{2} = 0, \quad (27)$$

при котором уравнение (26) принимает вид:

$$\beta'(t) = p^2 a^2 \bar{c}_1 e^{c\beta(t)}.$$

Интегрируя, находим:

$$\beta(t) = -c^{-1} \ln(-p^2 a^2 c_1 t + c_5). \quad (28)$$

Чтобы найти f следует проинтегрировать (23). В результате получим:

$$\ln f' = \frac{\bar{c}_1}{c} e^{c\theta} + c_2 \theta + c_4.$$

Отсюда, с учетом (26),

$$f' = \bar{c}_4 e^{\frac{c}{2}\theta} e^{\frac{\bar{c}_1}{c} e^{c\theta}}, \quad \bar{c}_4 = e^{c_4},$$

и, следовательно,

$$f = \bar{c}_4 \int e^{\frac{c}{2}\theta} e^{\frac{\bar{c}_1}{c} e^{c\theta}} d\theta = \frac{2\bar{c}_4}{c} \int e^{\frac{\bar{c}_1}{c} z^2} dz,$$

где обозначено $z = e^{\frac{c}{2}\theta}$. С учетом (25) и (27) находим:

$$\begin{aligned} z &= e^{\frac{c}{2}\theta} = e^{\frac{c}{2}(\alpha+\beta)} = \\ &= p \left(\frac{c}{2}x + c_3 \right) (-p^2 a^2 c_1 t + c_5)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\frac{c}{2}x + c_3 \right) (-a^2 c_1 t + \bar{c}_5)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

где $\bar{c}_5 = c_5 p^{-2}$. Переобозначив постоянные:

$$\frac{c}{2} = b, \quad \frac{\bar{c}_1}{c} = b_1, \quad c_3 = b_3, \quad \frac{2\bar{c}_4}{c} = b_2, \quad \bar{c}_5 = b_4,$$

приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *Криволинейная три-ткань, определенная уравнением теплопроводности (18), является регулярной тогда и только тогда, когда функция u имеет вид*

$$u = b_2 \int e^{b_1 z^2} dz,$$

где

$$z = (bx + b_3)(-4a^2 b^2 b_1 t + b_4)^{-\frac{1}{2}}.$$

6. Рассмотрим уравнение колебания

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \quad (29)$$

Как и в предыдущих случаях, ищем решения вида (2), определяющие регулярную три-ткань. Рассуждая как в п. 4 для уравнения Лапласа, приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. *Криволинейная три-ткань, определяемая решением уравнения (29), является регулярной тогда и только тогда, когда функция u имеет вид*

$$u = c \ln (\cosh(\alpha_0 + px) + \cosh(\beta_0 + apt)) + \bar{c}.$$

или

$$u = c \ln \left((x + \tilde{b} \cosh \varphi)^2 - (at - \tilde{b} \sinh \varphi)^2 \right) + \tilde{c}.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. Бляшке. *Введение в геометрию тканей*. Гос. издат. Физ.-мат. лит., 1959.
- [2] А. А. Уткин, М. А. Шелехов. О три-тканях, определяемых линейным дифференциальным уравнением первого порядка. *Изв. вузов. Матем.*, 11(474):54–57, 2001.
- [3] А. А. Уткин, М. А. Шелехов. Три-ткани, определяемые уравнением Риккати. *Изв. вузов. Матем.*, 11(510):87–90, 2004.
- [4] А. М. Шелехов, В. Б. Лазарева, Уткин А. А. *Криволинейные три-ткани*. Тверь, 2013, 237 с.

Поступила в редакцию 28 июля 2017, принята к печати 10 августа 2017.

Александр Михайлович Шелехов

Россия, Тверь, ул. 15 лет Октября, 13, кв. 153

Email: amshelikhov@rambler.ru