О канонических квази-геодезических отображениях рекуррентно- параболических пространств

И. Н. Курбатова, Д. В. Лозиенко

Abstract. We continue study of quasigeodesic mappings of recurrent parabolic spaces which were introduced earlier. A special class of such mappings, namely, canonical quasigeodesic mappings are considered and geometrical objects being invariant under the those mappings are constructed. We find metrics of the recurrent parabolic spaces admitting canonical quasigeodesic mappings on a flat recurrent parabolic space. The recurrent parabolic spaces with vectors fields of particular type admitting canonical quasi-geodesic mapping are indicated.

Аннотация. Продолжается изучение введенных ранее квази-геодезических отображений рекуррентно-параболических пространств. Выделен специальный класс таких отображений – канонические квази-геодезические отображения. Построены геометрические объекты, инвариантные относительно рассматриваемых отображений. Найдены метрики рекуррентно-параболических пространств, допускающих канонические квази-геодезические отображения на плоское пространство. Указаны рекуррентно-параболические пространства с векторными полями определенного типа, допускающие нетривиальные канонические квази-геодезические отображения.

УДК 517.764

Ключевые слова: параболическая структура, квази-геодезическое отображение

1. ВВЕДЕНИЕ

1°. Понятие квази-геодезического отображения (КГО) для римановых пространств V_4 сигнатуры Минковского было введено академиком АН УССР, основателем научной школы по гравитации и теории относительности А. З. Петровым [7]. КГО описывают ситуацию, когда движение свободной частицы в одном физическом поле моделируется движением частицы в другом поле под действием некоторой внешней силы типа Лоренца. С геометрической точки зрения КГО — это отображение, при котором геодезические линии одного риманова пространства V_4 переходят в так называемые квази-геодезические линии [7] другого риманова пространства $\bar{V}_4$.

В [3, 4, 5] исследовались КГО римановых пространств произвольной сигнатуры и размерности, снабженных аффинорными структурами определенного типа. В [6] мы ввели понятие рекуррентно-параболической структуры на римановом пространстве и рассмотрели некоторые вопросы, касающиеся КГО многообразий с такой структурой. В настоящей статье мы продолжаем изучение КГО римановых пространств с рекуррентно-параболической структурой.

Исследование ведется в тензорной форме, локально, в классе вещественных достаточно гладких, а в общем случае аналитических функций.

2°. Напомним, что аффинор $F_i^h(x)$ на дифференцируемом многообразии X_n определяет *e-структуру*, [8], если для него выполняются условия

$$F_i^\alpha F_\alpha^h = e \delta_i^h,$$

где $e = -1, +1$ или 0 . При $e = +1$ ее называют структурой *почти произведения*; при $e = -1$ — *почти комплексной*; при $e = 0$ — *почти параболической* (в случае интегрируемости аффинорной структуры — просто *комплексной* или *параболической*, соответственно).

Аффинорную структуру на римановом пространстве (V_n, g_{ij}) чаще всего согласовывают с метрикой в виде:

$$g_{i\alpha} F_j^\alpha = -g_{j\alpha} F_i^\alpha.$$

В зависимости от дифференциальных свойств аффинора в римановом пространстве с *e-структурой*, выделяют следующие классы пространств [2]: *келерово* — при $F_{i,j}^h = 0$, где « $,$ » — знак ковариантной производной по связности V_n ; *K-пространство* — при $F_{i,j}^h + F_{j,i}^h = 0$; *H-пространство* — при $F_{hi,j} + F_{ij,h} + F_{jh,i} = 0$, где $F_{hi} = g_{h\alpha} F_i^\alpha$ и др.

В дальнейшем будем операцию свертывания с аффинором обозначать следующим образом:

$$T_{i\dots}^{\dots} = T_{\alpha\dots}^{\dots} F_i^{\alpha}, \quad T_{\dots}^{\bar{i}\dots} = T_{\dots}^{\alpha\dots} F_{\alpha}^{\bar{i}}.$$

2. ПОНЯТИЕ РЕКУРРЕНТНО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

1°. Ранее, [6], мы ввели понятие *рекуррентно-параболической* структуры $F_i^h(x)$, заданной на четномерном римановом пространстве (V_n, g_{ij}) и удовлетворяющей условиям:

$$F_i^{\alpha} F_{\alpha}^h = 0, \quad F_{(ij)} = 0, \quad F_{ij} = F_j^{\alpha} g_{\alpha i}, \quad (2.1)$$

$$Rg\|F_i^h\| = m = \frac{n}{2}, \quad F_{i,j}^h = \rho_j F_i^h, \quad i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2)$$

где круглыми скобками обозначена операция симметрирования без множителя; «,» – знак ковариантной производной в пространстве V_n ; ρ_j – ковариантный вектор.

Само V_n с такой структурой, соответственно, называли *рекуррентно-параболическим* пространством, а ρ_j – *вектором рекуррентности*.

Ввиду (2.1) и (2.2) тождество Риччи для аффинора F_i^h принимает вид:

$$\rho_{[j,k]} F_i^h = R_{ijk}^{\bar{h}} - R_{ijk}^h$$

В частности, если вектор ρ_j градиентен, то для тензора Римана рассматриваемого пространства имеют место

$$R_{ijk}^{\bar{h}} - R_{ijk}^h = 0.$$

2°. Как известно, [8], аффинорная структура F_i^h на X_n называется *интегрируемой* (локально), если в некоторой невырожденной окрестности D каждой его точки существует такая система координат

$$y^1, y^2, \dots, y^n,$$

относительно которой все компоненты F_i^h в области D являются постоянными. Одним из критериев интегрируемости *e-структуры* является обращение в 0 ее тензора Нейенхейса, [8]:

$$N_{ij}^h = F_{i,j}^h - F_{j,i}^h + F_{i,\bar{j}}^h - F_{\bar{j},i}^h. \quad (2.3)$$

Имеет место

Теорема 2.1. *Рекуррентно-параболическая структура F_i^h на V_n интегрируема тогда и только тогда, когда вектор ρ_i в (2.2) удовлетворяет условию*

$$\rho_{\bar{i}} = 0. \quad (2.4)$$

Доказательство. Необходимость: если структура F_i^h интегрируема, то ее тензор Нейенхейса равен нулю и, значит, ввиду (2.1), (2.2) и (2.3),

$$\rho_{\bar{i}} F_j^h - \rho_{\bar{j}} F_i^h = 0.$$

Если здесь опустить индекс h в V_n , затем проциклировать по i, j, k и сравнить результат с исходными равенствами, то, вследствие (2.1), получим, что $\rho_{\bar{i}} F_j^h = 0$, то есть выполняются (2.4).

Достаточность: если выполняются (2.4), то на основании (2.1) и (2.2) тензор Нейенхейса обращается в ноль тождественно. $\square$

В дальнейших рассуждениях мы имеем ввиду именно интегрируемую рекуррентно-параболическую структуру.

3°. Интегрируемую параболическую *e-структуру* F_i^h в некоторой окрестности каждой точки V_n за счёт выбора системы координат (адаптированной к аффинору), можно привести к виду:

$$(F_i^h) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_m & 0 \end{pmatrix},$$

то есть:

$$F_b^{a+m} = \delta_b^a, \quad F_{b+m}^{a+m} = F_b^a = F_{b+m}^a = 0,$$

где $a, b = 1, 2, \dots, m = \frac{n}{2}$.

В дальнейшем нам будет полезен вспомогательный тензор B_i^h , который в адаптированной системе координат задаётся матрицей

$$(B_i^h) = \begin{pmatrix} 0 & E_m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом, очевидно, по необходимости

$$F_\alpha^\beta B_\beta^\alpha = m, \quad B_\alpha^h B_i^\alpha = 0, \quad F_\alpha^h B_i^\alpha + B_\alpha^h F_i^\alpha = \delta_i^h. \quad (2.5)$$

3. КАНОНИЧЕСКИЕ КГО РЕКУРРЕНТНО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

1°. Рассмотрим римановы пространства (V_n, g_{ij}, F_i^h) и $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, F_i^h)$, находящиеся в КГО, соответствующем аффинору F_i^h . В общей по отображению системе координат (x^i) основные уравнения КГО представляются в виде, [6]:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{ij}^h(x) &= \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}(x) \delta_{j)}^h(x) + \varphi_{(i}(x) F_{j)}^h(x) \\ \bar{F}_{(ij)}(x) &= 0, \quad \bar{F}_{ij}(x) = F_j^\alpha(x) \bar{g}_{\alpha i}(x), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\bar{\Gamma}_{ij}^h, \Gamma_{ij}^h$ — компоненты объектов связности пространств $\bar{V}_n$ и V_n , соответственно, а ψ_i, φ_i — ковекторы.

2°. Случай, когда в (3.1) $\psi_i = 0$ и $\varphi_i = 0$, считается тривиальным.

Если в (3.1) $\psi_i \neq 0$ и $\varphi_i = 0$, КГО вырождается в геодезическое отображение, [8].

Справедлива

Теорема 3.1. *Рекуррентно-параболические пространства не допускают нетривиальных геодезических отображений.*

Доказательство. Пусть в уравнениях (3.1) $\psi_i \neq 0, \varphi_i = 0$ и аффинов удовлетворяет (2.1), (2.2). Найдем связь между ковариантными производными F_i^h в пространствах $\bar{V}_n$ и V_n , используя (3.1):

$$F_{i|j}^h = \rho_j F_i^h + \psi_i \delta_j^h - \psi_i F_j^h,$$

$< | >$ — знак ковариантной производной по связности $\bar{\Gamma}_{ij}^h$. Опустим индекс h в $\bar{V}_n$, а затем просимметрируем по h, i . В результате получим

$$\psi_i \bar{g}_{hj} + \psi_h \bar{g}_{ij} - \psi_i \bar{F}_{hj} - \psi_h \bar{F}_{ij} = 0.$$

Отсюда, свертыванием с $\bar{g}^{hj}$ по индексам h, j находим $\psi_i = 0$ и, следовательно,

$$\psi_i \bar{F}_{hj} + \psi_h \bar{F}_{ij} = 0.$$

Если здесь поднять индекс h в $\bar{V}_n$ и свернуть полученные соотношения по индексам h, j с тензором B_h^j , то с учетом (2.5) будем иметь также

$$\psi_i = 0,$$

что свидетельствует о тривиальности геодезического отображения. $\square$

Эта теорема является аналогом известной в теории почти комплексных многообразий теоремы Яно-Вестлейка, [1].

3°. При $\psi_i = 0$ и $\varphi_i \neq 0$ выделяется специальный класс КГО, который будем называть *каноническими квази-геодезическими* отображениями и обозначать ККГО.

Имеет место

Теорема 3.2. *Образ рекуррентно-параболического пространства при ККГО является также рекуррентно-параболическим пространством.*

Доказательство. Пусть в уравнениях (3.1) $\psi_i = 0, \varphi_i \neq 0$ и аффинов удовлетворяет условиям (2.1), (2.2). Связь между ковариантными

производными F_i^h в пространствах $\bar{V}_n$ и V_n на основании (3.1) имеет вид:

$$F_{i|j}^h = \rho_j F_i^h + \varphi_{\bar{i}} F_j^h. \quad (3.2)$$

Опустим здесь индекс h в $\bar{V}_n$, а затем просимметрируем по h, i . В результате получим

$$\varphi_{\bar{i}} \bar{F}_{hj} + \varphi_{\bar{h}} \bar{F}_{ij} = 0.$$

Отсюда, как и в предыдущей теореме, следует, что

$$\varphi_{\bar{i}} = 0 \quad (3.3)$$

и, значит, из (3.2) получаем

$$F_{i|j}^h = \rho_j F_i^h,$$

т.е. в римановом пространстве $\bar{V}_n$ аффинов F_i^h также является рекуррентным, причем с тем же вектором рекуррентности ρ_j . $\square$

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ККГО РЕКУРРЕНТНО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

1°. Пусть рекуррентно-параболические пространства

$$(V_n, g_{ij}, F_i^h) \quad \text{и} \quad (\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, F_i^h)$$

находятся в ККГО, соответствующем аффинору F_i^h . Тогда в общей по отображению системе координат (x^i) основные уравнения рассматриваемых отображений представляются в виде, [6]:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \varphi_{(i}(x) F_{j)}^h(x), \quad (4.1)$$

$$F_\alpha^h(x) F_i^\alpha(x) = 0, \quad \bar{F}_{(ij)}(x) = 0, \quad \bar{F}_{ij}(x) = F_j^\alpha(x) \bar{g}_{\alpha i}(x), \quad (4.2)$$

$$F_{(ij)}(x) = 0, \quad F_{ij}(x) = F_j^\alpha(x) g_{\alpha i}(x), \quad (4.3)$$

$$F_{i,j}^h = F_{i|j}^h = \rho_j F_i^h.$$

Произведем свертывание (4.1) по индексам h, j с тензором B_h^j , учитывая при этом (2.4) и (3.3):

$$\bar{\Gamma}_{i\beta}^\alpha B_\alpha^\beta = \Gamma_{i\beta}^\alpha B_\alpha^\beta + (m+1) \varphi_i.$$

В результате соотношения (4.1) можно записать в виде

$$\bar{T}_{ij}^h = T_{ij}^h,$$

где

$$T_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h - \frac{1}{m+1} \left(\Gamma_{i\beta}^\alpha B_\alpha^\beta F_j^h + \Gamma_{j\beta}^\alpha B_\alpha^\beta F_i^h \right). \quad (4.4)$$

Аналогичным образом представляются в $\bar{V}_n$ компоненты $\bar{T}_{ij}^h$.

2°. С учетом (4.1)–(4.3) зависимость между компонентами тензоров Римана пространств V_n и $\bar{V}_n$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ijk}^h &= R_{ijk}^h + F_k^h(\varphi_{i,j} + \varphi_i\rho_j) - \\ &- F_j^h(\varphi_{i,k} + \varphi_i\rho_k) + F_i^h(\varphi_{k,j} + \varphi_k\rho_j - \varphi_{j,k} - \varphi_j\rho_k). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Отсюда свертыванием с $B_h^i F_l^k$ по i, h, k находим:

$$(m+1)\varphi_{j,\bar{l}} = -(\bar{R}_{\beta j \bar{l}}^\alpha - R_{\beta j \bar{l}}^\alpha)B_\alpha^\beta.$$

Если (4.5) свернуть с B_h^k по индексам h, k и учесть выражение для $\varphi_{j,\bar{l}}$, найдем:

$$\begin{aligned} (m^2 - 1)(\varphi_{i,j} + \varphi_i\rho_j) &= m(\bar{R}_{ij\beta}^\alpha - R_{ij\beta}^\alpha)B_\alpha^\beta + (\bar{R}_{ji\beta}^\alpha - R_{ji\beta}^\alpha)B_\alpha^\beta + \\ &+ (\bar{R}_{\beta i \bar{\gamma}}^\alpha - R_{\beta i \bar{\gamma}}^\alpha)B_\alpha^\beta B_j^\gamma + (\bar{R}_{\beta j \bar{\gamma}}^\alpha - R_{\beta j \bar{\gamma}}^\alpha)B_\alpha^\beta B_i^\gamma. \end{aligned}$$

Подставляя полученный результат в (4.5), представим их в виде

$$\bar{T}_{ijk}^h = T_{ijk}^h,$$

где

$$\begin{aligned} T_{ijk}^h &= R_{ijk}^h - F_k^h \tilde{R}_{ij} + F_j^h \tilde{R}_{ik} + F_i^h \tilde{R}_{[jk]}, \\ \tilde{R}_{ij} &= \frac{1}{m^2 - 1} \left(mR_{ij\beta}^\alpha + R_{ji\beta}^\alpha + mR_{\beta i \gamma}^\alpha B_j^\gamma + R_{\beta j \gamma}^\alpha B_i^\gamma \right) B_\alpha^\beta, \end{aligned} \quad (4.6)$$

при $m \neq 1$.

Аналогичным образом представляются в $\bar{V}_n$ компоненты $\bar{T}_{ijk}^h$.

Нами доказана

Теорема 4.1. *Геометрические объекты (4.4) и (4.6) инвариантны относительно ККГО рекуррентно-параболических пространств.*

Объект (4.4) имеет нетензорный характер и является аналогом параметров Томаса в теории геодезических отображений римановых пространств, [8]. Его сохранение необходимо и достаточно для того, чтобы отображение между рекуррентно-параболическими пространствами было ККГО.

Объект (4.6) является аналогом тензора голоморфно-проективной кривизны в теории голоморфно-проективных отображений келеровых пространств, [8]. Сохранение (4.6) — это необходимое условие того, чтобы отображение между рекуррентно-параболическими пространствами представляло собой ККГО.

5. ККГО РЕКУРРЕНТНО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ НА ПЛОСКОЕ ПРОСТРАНСТВО.

1°. Рассмотрим ККГО рекуррентно-параболического пространства V_n на плоское пространство $\bar{V}_n = E_n$. Справедлива

Теорема 5.1. *Если рекуррентно-параболическое пространство*

$$(V_n, g_{ij}, F_i^h), \quad n > 2,$$

допускает ККГО на плоское пространство $\bar{V}_n = E_n$, то оно будет Риччи-плоским, симметрическим, его вектор рекуррентности ρ_i по необходимости градиентен

$$\rho_i = \frac{\partial \rho(x)}{\partial x^i},$$

а тензор Римана по необходимости имеет вид

$$R_{hijk} = C_1 e^{-2\rho(x)} (F_{hk} F_{ij} - F_{hj} F_{ik} + 2F_{hi} F_{kj})$$

при некоторой константе C_1 .

Доказательство. 1. Рассмотрим ККГО рекуррентно-параболического пространства V_n на плоское пространство $\bar{V}_n = E_n$. Тогда $\bar{R}_{ijk}^h = 0$ и, соответственно, $\bar{T}_{ijk}^h = T_{ijk}^h = 0$, то есть из (4.6)

$$\begin{aligned} R_{ijk}^h &= F_k^h \tilde{R}_{ij} - F_j^h \tilde{R}_{ik} - F_i^h \tilde{R}_{[jk]}, \\ \tilde{R}_{ij} &= \frac{1}{m^2 - 1} \left(m R_{ij\beta}^\alpha + R_{ji\beta}^\alpha + m R_{\beta i \gamma}^\alpha B_j^\gamma + R_{\beta j \gamma}^\alpha B_i^\gamma \right) B_\alpha^\beta. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Заметим, что ввиду (2.4) и (3.3) из (4.5) следует

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h.$$

Отсюда при $\bar{R}_{ijk}^h = 0$ имеем $\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h = 0$ и, следовательно, с учетом (2.5), $\tilde{R}_{i\bar{j}} = 0$. Тогда свертывая (5.1) по индексам h, k находим, что $R_{ij} = 0$, то есть V_n оказывается Риччи-плоским.

2. Опуская в (5.1) индекс h и симметрируя результат по h, i , имеем:

$$F_{hk} \tilde{R}_{ij} + F_{ik} \tilde{R}_{hj} - F_{hj} \tilde{R}_{ik} - F_{ij} \tilde{R}_{hk} = 0.$$

Поднимем здесь индекс h в V_n , свернем с B_h^k и найдем

$$\tilde{R}_{ij} = C F_{ij}, \quad C = \frac{1}{m} \tilde{R}_{\alpha\beta} g^{\alpha\gamma} B_\gamma^\beta,$$

в соответствии с чем (5.1) примут вид:

$$R_{hijk} = C(F_{hk}F_{ij} - F_{hj}F_{ik} + 2F_{hi}F_{jk}), \quad (5.2)$$

где C — инвариант.

3. Найдем ковариантную производную тензора Римана пространства V_n , используя (5.2) и (4.3):

$$R_{hijk,l} = (C_{,l} + 2C\rho_l)(F_{hk}F_{ij} - F_{hj}F_{ik} + 2F_{hi}F_{kj}).$$

Проциклируем полученные равенства по индексам j, k, l , применим дифференциальное тождество Бианки, а результат свернём с $g^{ha}B_a^k$. В итоге получим

$$(C_{,l} + 2C\rho_l) = 0.$$

Отсюда следует

$$R_{hijk,l} = 0,$$

то есть наше пространство является симметрическим, а также что вектор рекуррентности нашей аффинорной структуры градиентен:

$$\rho_i = \frac{\partial \rho(x)}{\partial x^i}$$

и

$$C = C_1 e^{-2\rho}$$

при некоторой константе C_1 . В соответствии с (5.2) тензор Римана рекуррентно-параболического пространства, допускающего ККГО на плоское пространство, принимает вид:

$$R_{hijk} = C_1 e^{-2\rho} (F_{hk}F_{ij} - F_{hj}F_{ik} + 2F_{hi}F_{kj}), \quad (5.3)$$

где C_1 — некоторая константа. $\square$

2°. Выясним, допускает ли рекуррентно-параболическое пространство (V_n, g_{ij}, F_i^h) со структурой тензора Римана вида (5.3), нетривиальное ККГО. Другими словами, существует ли рекуррентно-параболическое пространство $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, F_i^h)$, являющееся образом при ККГО пространства (V_n, g_{ij}, F_i^h) с тензором Римана (5.3). Справедлива

Теорема 5.2. *Всякое рекуррентно-параболическое пространство*

$$(V_n, g_{ij}, F_i^h), \quad n \neq 2,$$

тензор Римана которого задаётся формулами (5.3), допускает нетривиальное ККГО, причём образ его $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, F_i^h)$ имеет структуру тензора Римана, аналогичную (5.3).

Доказательство. Пусть в V_n тензор Римана имеет вид (5.3). Тогда из (4.6) следует, что $T_{ijk}^h = 0$. Как мы только что доказали, верно и обратное: из $T_{ijk}^h = 0$ следует, что структура тензора Римана в таком пространстве имеет вид (5.3).

Предположим, что рекуррентно-параболическое пространство V_n с метрическим тензором g_{ij} , аффинором $F_i^h(x)$ и тензором Римана (5.3) нам задано. Если существует рекуррентно-параболическое относительно того же аффинора пространство $\bar{V}_n$ с метрическим тензором $\bar{g}_{ij}(x)$, на которое пространство V_n допускает ККГО, соответствующее вектору $\varphi_i(x) \neq 0$, то ввиду инвариантности T_{ijk}^h имеем, что $T_{ijk}^h = \bar{T}_{ijk}^h = 0$ и из (4.6) следует

$$\begin{aligned} \bar{C}_1 e^{-2\rho} \left(F_k^h \bar{F}_{ij} - F_j^h \bar{F}_{ik} + 2F_i^h \bar{F}_{kj} \right) = \\ = C_1 e^{-2\rho} \left(F_k^h F_{ij} - F_j^h F_{ik} + 2F_i^h F_{kj} \right) + \\ + F_k^h \left(\varphi_{i,j} + \varphi_i \rho_j \right) - F_j^h \left(\varphi_{i,k} + \varphi_i \rho_k \right) + \\ + F_i^h \left(\varphi_{k,j} + \varphi_k \rho_j - \varphi_{j,k} - \varphi_j \rho_k \right). \end{aligned}$$

Отсюда после свертывания с F_l^k по индексу k и B_h^k по h и k находим сначала $\varphi_{j,\bar{k}} = 0$, а затем

$$\varphi_{i,j} = \bar{C}_1 e^{-2\rho} F_j^\alpha \bar{g}_{\alpha i} - C_1 e^{-2\rho} F_{ij} - \varphi_i \rho_j. \quad (5.4)$$

Далее, ввиду (4.1)-(4.3) и (3.3),

$$\bar{g}_{ij,k} = \varphi_i F_k^\alpha \bar{g}_{\alpha j} + \varphi_j F_k^\alpha \bar{g}_{\alpha i}. \quad (5.5)$$

Эти уравнения представляют собой эквивалентную (4.1) форму основных уравнений ККГО.

Совокупность уравнений (5.4), (5.5) образует систему Коши в ковариантных производных первого порядка в V_n относительно $\bar{g}_{ij}(x)$ и $\varphi_i(x)$. На основании (4.2) в $\bar{V}_n$ мы также должны требовать выполнения условий

$$\bar{g}_{i\alpha} F_j^\alpha + \bar{g}_{j\alpha} F_i^\alpha = 0. \quad (5.6)$$

Исследуем смешанную систему (5.4), (5.5), (5.6) в V_n .

При этих условиях ковариантная производная аффинора в $\bar{V}_n$ автоматически равна

$$F_{i|j}^h = \rho_j F_i^h.$$

Существование решения

$$\bar{g}_{ij}(x) \equiv \bar{g}_{ji}(x), \quad (\det \|\bar{g}_{ij}\| \neq 0), \quad \varphi_i(x) \neq 0 \quad (5.7)$$

системы уравнений (5.4), (5.5), (5.6) в рекуррентно-параболическом пространстве V_n необходимо и достаточно, чтобы это пространство допускало ККГО.

Условия интегрируемости (5.4), (5.5) имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha R_{ijk}^\alpha = & \left(\bar{C}_1 e^{-2\rho} F_j^\alpha \bar{g}_{\alpha i} - C_1 e^{-2\rho} F_{ij} - \varphi_i \rho_j \right)_{,k} - \\ & - \left(\bar{C}_1 e^{-2\rho} F_k^\alpha \bar{g}_{\alpha i} - C_1 e^{-2\rho} F_{ik} - \varphi_i \rho_j \right)_{,j} \end{aligned}$$

и

$$\bar{g}_{\alpha j} R_{ikl}^\alpha + \bar{g}_{i\alpha} R_{jkl}^\alpha = \left(\varphi_i F_k^\alpha \bar{g}_{j\alpha} + \varphi_j F_k^\alpha \bar{g}_{i\alpha} \right)_{,l} - \left(\varphi_i F_l^\alpha \bar{g}_{j\alpha} + \varphi_j F_l^\alpha \bar{g}_{i\alpha} \right)_{,k}.$$

На основании (5.3)-(5.5) и (3.3) эти условия выполняются тождественно.

Наконец, дифференцируя ковариантно в V_n соотношения (5.6) и используя (5.5), убеждаемся, что первое дифференциальное продолжение условий (5.6) тоже выполняется тождественно.

Из теории дифференциальных уравнений следует, что смешанная система уравнений (5.4), (5.5), (5.6) имеет в рекуррентно-параболическом пространстве V_n , тензор Римана которого задаётся формулой (5.3), решение для любых начальных значений искомых функций (5.7), удовлетворяющих в точке M_0 условиям (5.6). Следовательно, всякое рекуррентно-параболическое пространство с тензором Римана вида (5.3) допускает нетривиальные ККГО, причем только на пространства с такой же структурой тензора Римана, как было показано выше. $\square$

3°. В [4] для параболически келерова пространства V_n , допускающего ККГО на плоское пространство, мы также получили структуру тензора Римана в виде

$$R_{hijk} = C(F_{hk}F_{ij} - F_{hj}F_{ik} + 2F_{hi}F_{kj}),$$

но при $C = \text{const}$ в отличие от (5.2). Поскольку это пространство симметрическое, мы применили формулу А. П. Широкова, позволяющую восстановить метрический тензор симметрического пространства в окрестности некоторой точки M_0 в V_n , и нашли, что:

$$g_{ij} = \overset{\circ}{g}_{ij} + \frac{C}{4} y^\alpha \overset{\circ}{F}_{\alpha i} y^\beta \overset{\circ}{F}_{\beta j},$$

где $\overset{\circ}{g}_{ij}$, $\overset{\circ}{F}_{ij}$ — компоненты тензоров g_{ij} , F_{ij} в точке x_0 , а y^h — римановы координаты с началом в точке x_0 .

В случае рекуррентно-параболического пространства с тензором Римана (5.3) формула А. П. Широкова дает такую же метрику с той лишь

разницей, что $C = C_1 e^{-2\rho(x_0)}$ при некоторой константе C_1 . Вывод мы не приводим ввиду его полной аналогии с [4].

Из теоремы 5.1 естественным образом вытекает

Следствие 5.3. *Рекуррентно-параболические пространства с неградиентным вектором рекуррентности ρ_i не допускают нетривиальных ККГО на плоское пространство.*

6. РЕКУРРЕНТНО-ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА, ДОПУСКАЮЩИЕ ККГО

1°. Справедлива

Теорема 6.1. *Для того, чтобы рекуррентно-параболическое пространство V_n допускало нетривиальное ККГО, необходимо и достаточно, чтобы в этом пространстве существовал дважды ковариантный неособенный симметрический тензор a_{ij} , удовлетворяющий условиям*

$$a_{ij,k} = \lambda_i F_{jk} + \lambda_j F_{ik}, \quad (6.1)$$

и

$$a_{i\alpha} F_j^\alpha + a_{j\alpha} F_i^\alpha = 0. \quad (6.2)$$

при некотором векторе $\lambda_i \neq 0$.

Абсолютно идентичная теорема была доказана нами в [5] для параболически келеровых пространств. При доказательстве этой теоремы использовались только алгебраические свойства параболической структуры (при $F_{i,j}^h = 0$), поэтому его можно без принципиальных изменений повторить и для рекуррентно-параболических пространств.

Мы используем указанную теорему для отыскания классов рекуррентно-параболических пространств, допускающих ККГО.

Напомним, что *эквидистантным*, [8], называется риманово пространство (V_n, g_{ij}) , в котором существует векторное поле $\sigma_i \neq 0$, удовлетворяющее уравнениям

$$\sigma_{i,j} = a g_{ij}.$$

Такие векторные поля называются *конциркулярными*. При $a \neq 0$, пространство считается принадлежащим основному типу, а при $a = 0$ — особому.

Тензор

$$a_{ij} = C_1 g_{ij} + C_2 e^{-2\rho} \sigma_i \sigma_j$$

в силу (4.2) удовлетворяет всем условиям теоремы 6.1. Здесь произвольные постоянные c_1, c_2 , можно подобрать так, чтобы a_{ij} был невырожденным. Следовательно, рекуррентно-параболические пространства, допускающие конциркулярное векторное поле, допускают ККГО, то есть имеет место

Теорема 6.2. *Эквидистантные рекуррентно-параболические пространства V_n , допускают нетривиальное ККГО.*

2°. Назовем рекуррентно-параболическое пространство (V_n, g_{ij}, F_i^h) почти эквидистантным, если в нем существует векторное поле $\xi_i \neq 0$, удовлетворяющее уравнениям

$$\xi_{i,j} = bF_{ij}. \quad (6.3)$$

Можно показать, что при этом вектор рекуррентности ρ_i в V_n по необходимости градиентен. Действительно, условия интегрируемости предыдущих условий с учетом (4.3) и тождества Риччи имеют вид

$$\xi_\alpha R_{ijk}^\alpha = (b_{,k} + b\rho_k)F_{ij} - (b_{,j} + b\rho_j)F_{ik}.$$

Отсюда после циклирования по индексам i, j, k и использования тождества Бианки найдем

$$(b_{,j} + b\rho_j)F_{ik} + (b_{,i} + b\rho_i)F_{kj} + (b_{,k} + b\rho_k)F_{ji} = 0.$$

Поднимая здесь индекс i в V_n и свертывая результат с B_i^k по i, k , получим

$$b_{,j} + b\rho_j = 0,$$

откуда следует, что ρ_i градиентен и при этом

$$b = Ce^{-\rho(x)}, \quad (6.4)$$

где $C = \text{const.}$

Если рекуррентно-параболическое пространство является почти эквидистантным основного типа ($b \neq 0$), то тензор

$$a_{ij} = c_1\xi_i\xi_j + c_2g_{ij}$$

удовлетворяет условиям (6.1), но (6.2) будут выполняться только при

$$\xi_i = 0 \quad (6.5)$$

и произвольных постоянных c_1, c_2 .

Теорема 6.3. *Рекуррентно-параболическое пространство (V_n, g_{ij}, F_i^h) с градиентным вектором рекуррентности ρ_i , в котором существует векторное поле ξ_i , удовлетворяющее условиям (6.3)-(6.5), допускает нетривиальное ККГО.*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] K. Yano. *Differential geometry on complex and almost complex spaces*. International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, Vol. 49. A Pergamon Press Book. The Macmillan Co., New York, 1965.
- [2] Д. В. Беклемишев. *Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой*. Итоги науки: Геометрия, 1963. Москва: ВИНТИ, 1965.
- [3] И. Н. Курбатова. НР-отображения Н-пространств. *Украинский геометрический сборник*, (27):75–82, 1984.
- [4] И. Н. Курбатова. Канонические квази-геодезические отображения параболически келеровых пространств. *Proc. Intern. Geom. Center*, 7(1):53–64, 2014.
- [5] И. Н. Курбатова. О закономерностях канонических квази-геодезических отображений параболически келеровых пространств. *Proc. Intern. Geom. Center*, 7(2):26–35, 2014.
- [6] И. Н. Курбатова, О. Т. Сисюк. Квази-геодезические отображения рекуррентно-параболических пространств. *Proc. Intern. Geom. Center*, 8(1):74–83, 2014.
- [7] А. З. Петров. Моделирование фмзических полей. *Гравитация и теория относительности*, (4-5):7–21, 1968.
- [8] Н. С. Синоков. *Геодезические отображения римановых пространств*. Москва: Наука, 1979.

Курбатова Ирина Николаевна

ОНУ, ОДЕССА, УКРАИНА

Email: irina.kurbatova27@gmail.com

Лозиенко Дарья Витальевна

ОНУ, ОДЕССА, УКРАИНА

Email: lozienkodv@gmail.com