Голоморфно-проективні перетворення та конформно-келерові многовиди

Є. В. Черевко

Анотація Розглянуто голоморфно-проективні відображення та можливість їх існування на локально конформно-келерових многовидах. Отримана система рівнянь типу Коши, що є визначальною для групи конформно голоморфно-проективних інфінітезимальних перетворень.

Ключові слова Локально конформно-келеровий многовид · Похідна Лі · голоморфно-проективне перетворення

УДК 514.763.45

1 Вступ

Об'єктом дослідження в цій статті є локально конформно-келерові многовиди такі, що $\dim(M) = n = 2m > 2$. Конформно-келеровим многовидам присвячені роботи багатьох дослідників. Локально конформно-келерові многовиди розглядалися [13], [2], [8]. Голоморфно-проективні відображення многовидів вивчалися у, [5], [10]. Велика увага питанням інфінітезимальних голоморфно-проективних перетворень стосовно комплексних многовидів вивчалась [14]. Метою цієї роботи є дослідження проблеми голоморфно-проективних перетворень локально конформно-келерових многовидів.

2 ЛКК-многовиди

Спочатку, дамо декілька необхідних означень.

Означення 1 *Майже комплексною структурою J називають такий афінор J_j^i , що:*

$$J_\alpha^i J_j^\alpha = -\delta_j^i \quad (1)$$

Тут δ_j^i - символ Кронекера.

Означення 2 *Многовид, на якому задано майже комплексну структуру J , називають майже комплексним многовидом.*

Означення 3 *Майже комплексний многовид є майже ермітовим, якщо на ньому задана ермітова метрика:*

$$J_i^\alpha J_j^\beta g_{\alpha\beta} = g_{ij} \quad (2)$$

Майже ермітовий многовид позначаємо $\{M_n, J, g\}$.

Означення 4 *Майже ермітовий многовид $\{M_n, J, g\}$ є ермітовим, якщо майже комплексна структура є інтегрованою, [14].*

Зауважимо, якщо майже комплексна структура J та многовид M_n будуть належати класу C^ω , достатньою умовою інтегровності майже комплексної структури є тотожна рівність нулю тензора Нейенхейса:

$$N_{ij}^k = J_i^\alpha (\partial_j J_\alpha^k - \partial_\alpha J_j^k) - J_j^\alpha (\partial_i J_\alpha^k - \partial_\alpha J_i^k) = 0, \quad (3)$$

або, що еквівалентно

$$J_{i,j}^k = J_i^\alpha J_j^\beta J_{\alpha,\beta}^k. \quad (4)$$

Комою ми позначаємо коваріантну похідну в зв'язності, узгодженій з римановою метрикою g_{ij} .

Якщо до того ж, на ермітовому многовиді $\{M_n, J, g\}$ має місце

$$J_{i,j}^k = 0, \quad (5)$$

то воно є *келеровим*.

Означення 5 *Ермітовий многовид M_n , має назву локально конформно-келерового (коротше, ЛКК-) многовидом, якщо існує відкрите покриття $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ многовиду M та система $\Sigma = \{\sigma_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}\}_{\alpha \in A}$ гладких функцій таких, що $\{J|_{U_\alpha}, \hat{g}_\alpha = e^{-2\sigma_\alpha} g|_{U_\alpha}\}$ - келерова структура для будь якого $\alpha \in A$. Перехід від метрики $g|_{U_\alpha}$ до метрики $e^{-2\sigma_\alpha} g|_{U_\alpha}$ має назву локально конформного перетворення структури. Функція σ має назву визначальною функцією конформного перетворення[2].*

Відомо, що на ЛКК-многовиді, форма $\mathcal{L}i$ (Lee form), компоненти якої визначаються формулою [2]:

$$\omega = \frac{1}{m-1} \delta \Omega \circ J \quad \text{або} \quad \omega_i = -\frac{2}{n-2} J_{\beta, \alpha}^{\alpha} J_i^{\beta}, \quad (6)$$

має бути замкненою:

$$d\omega = 0.$$

Коваріантна похідна майже комплексної структури у зв'язності Леві-Чівіта на ЛКК-многовиді виражена формулою:

$$J_{i,j}^k = \frac{1}{2} (\delta_j^k J_i^{\alpha} \omega_{\alpha} - \omega^k J_{ij} - J_j^k \omega_i + J_{\alpha}^k \omega^{\alpha} g_{ij}). \quad (7)$$

3 Голоморфно-проективні відображення

В майже комплексному просторі M^{2m} зв'язність на головному розшаруванні реперів $E^c(M^{2m})$ має назву *майже комплексної зв'язності*, або, коротше, *J-зв'язністю*, *F-зв'язністю*. Доведено, що коваріантна похідна майже комплексної структури у цій зв'язності дорівнює нулю [4, с. 180]:

$$\nabla_i J = 0$$

На будь-якому комплексному многовиді з довільною афіною зв'язністю $\dot{G}$ можна задати зв'язність $\ddot{G}$, яка буде *J-зв'язністю* :

$$\ddot{G}_{ij}^h = \dot{G}_{ij}^h - \frac{1}{2} J_r^h \dot{\nabla}_i J_j^r.$$

Зауважимо, що ця зв'язність не є єдиною, і у загальному випадку, не є симетричною. Існує, наприклад, [9] так звана, *напівсиметрична J-зв'язність*, тобто така, що

$$\Phi_1 \Phi_3 S_{ij}^h = 0,$$

де S_{ij}^h – тензор крутіння *J-зв'язності*, а Φ_1 та Φ_3 – оператори Обати, що діють на довільний тензор Q_{ij}^h таким чином:

$$\Phi_1 Q_{ij}^h = \frac{1}{2} (\delta_j^b \delta_a^h - J_j^b J_a^h) Q_{ib}^a; \quad \Phi_3 Q_{ij}^h = \frac{1}{2} (\delta_i^a \delta_j^b - J_i^a J_j^b) Q_{ab}^h.$$

Крива L простору M^{2m} в якому існує напівсиметрична майже комплексна зв'язність, що є заданою параметричними рівняннями $x^i = x^i(t)$, та відповідає диференціальним рівнянням [14, с. 258]:

$$\frac{d^2 x^h}{dt^2} + \Gamma_{jk}^h \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = \alpha(t) \frac{dx^h}{dt} + \beta(t) J_i^h \frac{dx^i}{dt}, \quad (8)$$

де $\alpha(t)$, $\beta(t)$ – деякі функції, а Γ_{jk}^h – коефіцієнти майже комплексної зв'язності, має назву *аналітично-планарної*, або, *голоморфно-планарної* кривої.

Означення 6 Дифеоморфізм $f : M^{2m} \longrightarrow \dot{M}^{2m}$ зветься голоморфно-проективним відображенням, якщо у результаті дії f усі голоморфно-планарні криві M^{2m} переходять у голоморфно-планарної криві $\dot{M}^{2m}$.

Фактично, голоморфно-проективне відображення – це співвідповідність двох напівсиметричних майже комплексних зв'язностей. Якщо вони є симетричними, то:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \delta_i^k \psi_j + \delta_j^k \psi_i - \psi_t J_i^t J_j^k - \psi_t J_j^t J_i^k$$

Стосовно ермітових многовидів, до яких відносяться і досліджувані ЛКК-многовиди, відомо, що інтегровність майже комплексної структури гарантує існування симетричної J -зв'язності. Зокрема, такою J -зв'язністю на ЛКК-многовидах є певна зв'язність Вейля:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2}\omega(X)Y - \frac{1}{2}\omega(Y)X + \frac{1}{2}g(X, Y)B$$

Зрозуміло, що в цьому сенсі можливе існування голоморфно-планарних кривих на ЛКК-многовидах, і голоморфно-проективні відображення ЛКК-многовидів є фактично локально голоморфно-проективними відображеннями келерових многовидів. У [11] голоморфно-проективні відображення ЛКК-многовидів розглянуто з точки зору узагальнення таким чином, що голоморфно-проективними відображеннями вважаються такі дифеоморфізми, які зберігають не тільки комплексну структуру J_i^j , а також, її коваріантну похідну $\nabla_k J_i^j$. Автори довели, що такі нетривіальні відображення є неможливими для многовидів дійсної розмірності $n > 2$. Також, у роботі [3], доведено, що власні представники не тільки класу W_4 (ЛКК-многовиди), а і $W_1 \oplus W_4$, $W_2 \oplus W_4$, та $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ – також не дозволяють нетривіальних голоморфно-проективних відображень. В свою чергу, у роботі [6] запропоновано інший підхід. Автори пропонують підхід, який полягає у наступному. Розглядається дифеоморфізм $f : (H^n, g, J) \longrightarrow (\bar{H}^n, \bar{g}, J)$, який є дифеоморфізмом між двома ЛКК-многовидами (H^n, g, J) та $(\bar{H}^n, \bar{g}, J)$, причому, f – це композиція дифеоморфізмів $f = f_3 \circ f_2 \circ f$, таких, що:

1. $f_1 : (H^n, g, J) \longrightarrow ({}^1\mathcal{K}^n, {}^1g, J)$ – конформне відображення, 1g – келерова метрика.
2. $f_2 : ({}^1\mathcal{K}^n, {}^1g, J) \longrightarrow ({}^2\mathcal{K}^n, {}^2g, J)$ – голоморфно-проективне відображення між двома келеровими структурами, 2g – келерова метрика.
3. $f_3 : ({}^2\mathcal{K}^n, {}^2g, J) \longrightarrow (\bar{H}^n, \bar{g}, J)$ – конформне відображення, $\bar{g}$ – ЛКК-метрика.

Такий дифеоморфізм має назву *конформно-голоморфно-проективного відображення*. Зазначимо, що згідно з [7], множина конформно-голоморфно-проективних відображень не має групової структури.

4 Інфінітезимальні голоморфно-проективні перетворення

Означення 7 *Перетворення многовиду M_n*

$$\bar{x}^h = x^h + \epsilon \xi^h(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad (9)$$

де ϵ – довільний малий параметр незалежний від x^i має назву інфінітезимального перетворення многовиду M_n . Вектор $\xi(x^1, x^2, \dots, x^n)$ має назву генератора перетворення.

Похідна Лі (Lie derivative) тензора $\mathfrak{L}_\xi T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ типу (p, q) уздовж векторного поля ξ в координатах має вигляд:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_\xi T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = & T_{j_1 \dots j_q, s}^{i_1 \dots i_p} \xi^s + T_{kj_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \xi^k_{, j_1} + \dots + T_{kj_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \xi^k_{, j_1} - \\ & - T_{j_1 \dots j_q}^{li_2 \dots i_p} \xi^i_{, l} - T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots l} \xi^i_{, l}. \end{aligned} \quad (10)$$

Нехай на майже комплексному многовиді M^n , на якому задано напівсиметричну J -зв'язність, існує векторне поле ξ , таке, що інфінітезимальне перетворення (9) для малих значень ϵ відображує будь-яку аналітично-планарну криву у аналітично-планарну криву. Тоді, перетворення (9) матиме назву *інфінітезимального голоморфно-проективного перетворення*. Враховуючи (8), маємо [14, с. 267]:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_\xi \left(\frac{d^2 x^h}{dt^2} + \Gamma_{jk}^h \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} - \alpha(t) \frac{dx^h}{dt} - \beta(t) J_i^h \frac{dx^i}{dt} \right) \\ = \gamma(t) \frac{dx^h}{dt} + \delta(t) J_i^h \frac{dx^i}{dt} \end{aligned} \quad (11)$$

уздовж будь-якої аналітично-планарної кривої, де $\gamma(t)$ та $\delta(t)$ – деякі функції параметру t . Похідна Лі об'єкту зв'язності, у такому випадку, матиме вигляд:

$$\mathfrak{L}_\xi \Gamma_{ij}^h = \rho_j \delta_i^h + \rho_i \delta_j^h - \rho_t J_i^t J_j^h - \rho_t J_j^t J_i^h + \theta_j \delta_i^h + \theta_t J_i^t J_j^h, \quad (12)$$

де ρ та θ – певними ковекторними полями. Вектор ξ має назву *H -проективного вектору*. Якщо ж J -зв'язність є симетричною, то (12) прийме вигляд [12]:

$$\mathfrak{L}_\xi \Gamma_{ij}^h = \rho_j \delta_i^h + \rho_i \delta_j^h - \rho_t J_i^t J_j^h - \rho_t J_j^t J_i^h. \quad (13)$$

Кажуть, що ковектор ρ є асоційованим ковектором до вектору ξ . Крім симетричності J -зв'язності, вимагатимемо збереження при перетвореннях майже комплексної структури, а саме

$$\mathfrak{L}_\xi J_j^i = \xi^k \partial_k J_j^i - J_j^\alpha \partial_\alpha \xi^i + J_\alpha^i \partial_j \xi^\alpha = 0.$$

Оскільки ми розглядатимемо лише симетричні J -зв'язності, частинні похідні можна замінити коваріантними у будь якій симетричній зв'язності:

$$\mathfrak{L}_\xi J_j^i = \xi^k \nabla_k J_j^i - J_j^\alpha \nabla_\alpha \xi^i + J_\alpha^i \nabla_j \xi^\alpha = 0. \quad (14)$$

Виникає питання, чи можливі нетривіальні інфінітезимальні перетворення ЛКК-многовидів, на яких похідна Лі зв'язності Леві-Чівіта подана виразом (12). Як ми надалі побачимо, відповідь на це питання є негативною. Знайдемо похідну Лі коваріантної похідної комплексної структури J , користуючись тотожністю [14, с. 159], що є вірною для будь-яких інфінітезимальних перетворень:

$$\mathfrak{L}_\xi J_{i,j}^h - (\mathfrak{L}_\xi J_i^h)_{,j} = J_i^\beta \mathfrak{L}_\xi \Gamma_{j\beta}^h - J_\beta^h \mathfrak{L}_\xi \Gamma_{ji}^\beta. \quad (15)$$

Оскільки, векторне поле ξ є контраваріантним аналітичним, і тому $\mathfrak{L}_\xi J_i^k = 0$, маємо:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_\xi J_{i,j}^h &= J_i^\beta (\rho_j \delta_\beta^h + \rho_\beta \delta_j^h - \rho_t J_\beta^t J_j^h - \rho_t J_j^t J_\beta^h) \\ &- J_\beta^h (\rho_j \delta_i^\beta + \rho_i \delta_j^\beta - \rho_t J_i^t J_j^\beta - \rho_t J_j^t J_i^\beta) = \rho_j J_i^h + J_i^\beta \rho_\beta \delta_j^h \\ &+ \rho_i J_j^h + \rho_t J_j^t \delta_i^h - \rho_j J_i^h - \rho_i J_j^h - \rho_t J_i^t \delta_j^h - \rho_t J_j^t \delta_i^h \equiv 0. \end{aligned} \quad (16)$$

З іншого боку, у комплексних координатах (z^κ) на ермітових многовидах, зокрема, є справедливим [14, с. 65]:

$$J_{\lambda,\mu}^\kappa = -2\sqrt{-1}\Gamma_{\lambda\mu}^\kappa$$

Отже,

$$\mathfrak{L}_\xi J_{\lambda,\mu}^\kappa = -2\sqrt{-1}\mathfrak{L}_\xi \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa.$$

Зауважимо, що останню рівність можна отримати безпосередньо з (15). Враховуючи (16), маємо, що

$$\mathfrak{L}_\xi \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa = 0. \quad (17)$$

Відомо, що на ермітових многовидах для зв'язності Леві-Чівіта [14, с. 65]

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\kappa = \frac{1}{2}g^{\kappa\hat{\rho}}(\partial_{\hat{\lambda}}g_{\mu\hat{\rho}} - \partial_{\hat{\rho}}g_{\mu\hat{\lambda}}).$$

Для ЛКК-многовиду це матиме вигляд:

$$\Gamma_{\hat{\lambda}\mu}^{\kappa} = \frac{1}{2}g^{\kappa\hat{\rho}}(\omega_{\hat{\lambda}}g_{\mu\hat{\rho}} - \omega_{\hat{\rho}}g_{\mu\hat{\lambda}}) = \frac{1}{2}(\omega_{\hat{\lambda}}\delta_{\mu}^{\kappa} - \omega^{\kappa}g_{\mu\hat{\lambda}}).$$

Внаслідок (16), $\mathfrak{L}_{\xi}\omega_{\mu} = \mathfrak{L}_{\xi}\omega_{\hat{\lambda}} = 0$, отже, з (17) отримуємо:

$$\mathfrak{L}_{\xi}\Gamma_{\hat{\lambda}\mu}^{\kappa} = \frac{1}{2}(-\mathfrak{L}_{\xi}(\omega^{\kappa})g_{\mu\hat{\lambda}} - \omega^{\kappa}\mathfrak{L}_{\xi}(g_{\mu\hat{\lambda}})) = 0 \quad (18)$$

Враховуючи, що (18) виконується і для комплексно-спряжених виразів, згортаючи з $(\omega_{\kappa}, \omega_{\hat{\kappa}})$, з (18) випливає:

$$-(\omega_{\kappa}\mathfrak{L}_{\xi}(\omega^{\kappa}) + \omega_{\hat{\kappa}}\mathfrak{L}_{\xi}(\omega^{\hat{\kappa}}))g_{\mu\hat{\lambda}} - \|\omega\|^2\mathfrak{L}_{\xi}(g_{\mu\hat{\lambda}}) = 0,$$

або,

$$\mathfrak{L}_{\xi}(\|\omega\|^2)g_{\mu\hat{\lambda}} + \|\omega\|^2\mathfrak{L}_{\xi}(g_{\mu\hat{\lambda}}) = 0.$$

Оскільки, на ЛКК-многовидах, $\|\omega\|^2 \neq 0$, можливі два випадки. У першому, якщо $\mathfrak{L}_{\xi}(\|\omega\|^2) = 0$, необхідно щоб $\mathfrak{L}_{\xi}(g_{\mu\hat{\lambda}}) = 0$, тобто перетворення буде ізометрією. У другому, коли $\mathfrak{L}_{\xi}(\|\omega\|^2) \neq 0$, перетворення буде інфінітезимальним конформним. Але, для форми Лі, у випадку інфінітезимальних конформних перетворень

$$\mathfrak{L}_{\xi}\omega_i = \varphi_i,$$

де φ_i – асоційований ковектор конформного перетворення, а для перетворень, що викликають деформацію зв'язності вигляду

$$\mathfrak{L}_{\xi}\Gamma_{ij}^h = \rho_j\delta_i^h + \rho_i\delta_j^h - \rho_t J_i^t J_j^h - \rho_t J_j^t J_i^h,$$

внаслідок (16) та означення форми Лі

$$\mathfrak{L}_{\xi}\omega_i = 0,$$

отримуємо, що $\varphi_i = 0$, а це, означає, що таке перетворення є гомотетією, тобто, знову, тривіальним. Таким чином, доведено теорему

Теорема 1 *ЛКК-многовид M^n , не дозволяє існування нетривіальних інфінітезимальних перетворень із збереженням комплексної структури та її коваріантної похідної, зокрема таких, що*

$$\mathfrak{L}_{\xi}\Gamma_{ij}^h = \rho_j\delta_i^h + \rho_i\delta_j^h - \rho_t J_i^t J_j^h - \rho_t J_j^t J_i^h.$$

5 Інфінітезимальні конформно голоморфно-проективні перетворення

Нехай, на деякому околі ЛКК-многовиду існує келерова метрика $\hat{g}_{ij} = g_{ij}e^{-2\sigma}$ і векторне поле ξ^i , що генерує голоморфно-проективні перетворення. Позначимо:

$$\xi_i = \xi^\alpha g_{\alpha i}; \quad \hat{\xi}_i = \xi^\alpha \hat{g}_{\alpha i} = \xi_i e^{-2\sigma}.$$

Коваріантну похідну в u зв'язності $\hat{\Gamma}_{ij}^k$, узгоджений з метрикою $\hat{g}$, ми будемо позначати вертикальною рисою ", а у зв'язності Γ_{ij}^k , узгоджений з метрикою ЛКК-многовиду g , позначимо, як зазвичай, комою. Тоді центральне рівняння інфінітезимальних перетворень

$$\xi_{i|jk} = \xi_\alpha \hat{R}_{kji}^\alpha + \hat{g}_{hi} \mathfrak{L}_\xi \hat{\Gamma}_{jk}^h,$$

враховуючи (13), матиме вигляд:

$$\hat{\xi}_{i|jk} = \hat{\xi}_\alpha \hat{R}_{kji}^\alpha + \rho_j \hat{g}_{ik} + \rho_k \hat{g}_{ij} - \rho_t J_j^t \hat{J}_{ik} - \rho_t J_k^t \hat{J}_{ji}. \quad (19)$$

Тут $\hat{J}_{ik} = \hat{g}_{sk} J_i^s$. Коваріантне диференціювання за x^j дає

$$\hat{\xi}_{i|j} = (\xi_{i,j} - \frac{1}{2}\xi_i \omega_j + \frac{1}{2}\xi_j \omega_i) e^{-2\sigma} - \frac{1}{2}\omega^\alpha \xi_\alpha \hat{g}_{ij}.$$

Далі, коваріантно диференціюємо за x^k :

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{i|jk} = e^{-2\sigma} & \left(\xi_{i,jk} + \xi_\alpha \left(\frac{1}{4}\omega_k (\delta_j^\alpha \omega_i - \delta_i^\alpha \omega_j) - \frac{1}{4}\omega^\alpha (\omega_i g_{jk} - \omega_j g_{ik}) + \right. \right. \\ & + \frac{1}{2}(\omega^\alpha_{,j} g_{ik} - \omega^\alpha_{,i} g_{jk}) + \frac{1}{2}(\delta_j^\alpha \omega_{i,k} - \delta_i^\alpha \omega_{j,k}) \\ & \left. + \frac{1}{4}||\omega||^2 (\delta_i^\alpha g_{jk} - \delta_j^\alpha g_{ik}) \right) - \\ & - \frac{1}{2}((\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,k} g_{ij} + (\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,j} g_{ik} - (\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,i} g_{jk}), \end{aligned} \quad (20)$$

де $||\omega||^2 = \omega_i \omega_j g^{ij}$. Крім того, тензор кривини $\hat{R}$ зв'язності $\hat{\Gamma}_{ij}^k$, узгоджений з метрикою $\hat{g}$ пов'язаний з тензором кривини ЛКК-многовиду таким чином:

$$\begin{aligned} \hat{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h & + \delta_j^h \left(\frac{1}{2}\omega_{i,k} + \frac{1}{4}\omega_i \omega_k - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ik} \right) - \\ & - \delta_k^h \left(\frac{1}{2}\omega_{i,j} + \frac{1}{4}\omega_i \omega_j - \frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ij} \right) + \\ & + \left(\frac{1}{2}\omega^h_{,j} + \frac{1}{4}\omega^h \omega_j \right) g_{ik} - \left(\frac{1}{2}\omega^h_{,k} + \frac{1}{4}\omega^h \omega_k \right) g_{ij}, \end{aligned} \quad (21)$$

Підставивши (20) та (21) у (19), отримуємо для ЛКК-многовиду :

$$e^{-2\sigma} \xi_{i,jk} = e^{-2\sigma} (\xi_\alpha R_{kji}^\alpha + \frac{1}{2} ((\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,k} g_{ij} + (\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,j} g_{ik} - (\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,i} g_{jk}) + \rho_j g_{ik} + \rho_k g_{ij} + \rho_t J_j^t J_{ik} + \rho_t J_k^t J_{ji}),$$

враховуючи, що $\hat{J}_{ik} = e^{-2\sigma} J_{ik}$. Оскільки, $e^{-2\sigma} \neq 0$, остаточно маємо:

$$\xi_{i,jk} = \xi_\alpha R_{kji}^\alpha + \frac{1}{2} ((\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,k} g_{ij} + (\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,j} g_{ik} - (\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,i} g_{jk}) + \rho_j g_{ik} + \rho_k g_{ij} - \rho_t J_j^t J_{ik} - \rho_t J_k^t J_{ji}. \quad (22)$$

Рівняння (22) визначає на ЛКК-многовиді (M^n, g, J) конформно-голоморфно-проективні інфінітезимальні перетворення. Ми отримали, що для конформно-голоморфно-проективних інфінітезимальних перетворень похідна Лі об'єкту зв'язності Леві-Чівіта матиме вигляд:

$$\mathfrak{L}_\xi \Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2} (\delta_j^h (\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,i} + \delta_i^h (\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,j} - g^{hr} (\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,r} g_{ij}) + \rho_j \delta_i^h + \rho_i \delta_j^h - \rho_t J_i^t J_j^h - \rho_t J_j^t J_i^h. \quad (23)$$

Існує тотожність [15, с. 16], яка стосовно метричного тензору g , приймає вигляд

$$\nabla_k \mathfrak{L}_\xi g_{ij} - \mathfrak{L}_\xi \nabla_k g_{ij} = g_{is} \mathfrak{L}_\xi \Gamma_{kj}^s + g_{sj} \mathfrak{L}_\xi \Gamma_{ki}^s. \quad (24)$$

Враховуючи, що у випадку зв'язності Леві-Чівіта $\nabla_k g_{ij} = 0$, та (24), матимемо:

$$\nabla_k \mathfrak{L}_\xi g_{ij} = (\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,k} g_{ij} + 2\rho_k g_{ij} + \rho_j g_{ki} + \rho_i g_{jk} - \rho_t J_j^t J_{ki} - \rho_t J_i^t J_{kj}. \quad (25)$$

Далі, згідно [15, с. 17], для зв'язності Леві-Чівіта

$$\mathfrak{L}_\xi R_{ijk}^h = \nabla_j \mathfrak{L}_\xi \Gamma_{ik}^h - \nabla_k \mathfrak{L}_\xi \Gamma_{ij}^h. \quad (26)$$

Підставивши (23) у (26), отримуємо

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_\xi R_{ijk}^h = & \frac{1}{2} (\delta_k^h (\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,ij} - g^{hr} (\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,rj} g_{ik} - \delta_j^h (\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,ik} \\ & + g^{hr} (\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,rk} g_{ij}) + \rho_{i,j} \delta_k^h - \rho_{i,k} \delta_j^h - \rho_{t,j} J_i^t J_k^h - \rho_{t,i} J_j^t J_k^h \\ & - \rho_{t,i} J_k^t J_{j,j}^h - \rho_{t,j} J_k^t J_i^h - \rho_{t,j} J_i^t J_k^h - \rho_{t,k} J_i^t J_j^h + \rho_{t,k} J_j^t J_i^h + \rho_{t,i,k} J_j^h \\ & + \rho_{t,i} J_j^t J_{j,k}^h + \rho_{t,k} J_j^t J_i^h + \rho_{t,j,k} J_i^h + \rho_{t,j} J_{j,k}^h. \end{aligned} \quad (27)$$

Підставивши (22), та (7), тобто явний вираз для коваріантної похідної майже комплексної структури ЛКК-многовиду у зв'язності Леві-Чівіта, у (27), та згорнувши за індексами h та k , ми отримуємо:

$$\begin{aligned} \rho_{i,j} = & \frac{1}{2}\omega^t \rho_t g_{ij} - \frac{1}{2}\rho_i \omega_j - \frac{1}{2}\rho_j \omega_i + \frac{1}{n+2}(R_{ij,t}\xi^t + R_{tj}\xi^t_{,i} \\ & + R_{it}\xi^t_{,j} - \frac{n-2}{2}(\omega_{i,j}\xi^s - \frac{1}{2}\omega_{i,t}\omega_j\xi^t - \frac{1}{2}\omega_{j,t}\omega_i\xi^t) \\ & + (\frac{n-2}{2}\omega_{s,t}\omega^s\xi^t - \frac{\Delta_2\omega_{,t}}{2}\xi^t)g_{ij} \quad (28) \\ & - \frac{n-2}{2}(\omega_{i,t}\xi^t_{,j} + \omega_{j,t}\xi^t_{,i} + \omega_i\omega_t\xi^t_{,j} + \omega_j\omega_t\xi^t_{,i}) \\ & + \frac{1}{2}(\frac{n-2}{2}||\omega||^2 - \Delta_2\omega)(\xi_{i,j} + \xi_{j,i}). \end{aligned}$$

Ми тут також, врахували, що для ЛКК-многовидів є справедливим

$$\begin{aligned} J_{j,k}^h - J_{j,k}^h = & \frac{1}{4}(\delta_j^h\omega_k J_i^s\omega_s - \delta_k^h\omega_j J_i^s\omega_s - \delta_j^h||\omega||^2 J_{ik} + \delta_k^h||\omega||^2 J_{ij} \\ & + \omega^h\omega_j J_{ik} - \omega^h\omega_k J_{ij} + J_k^h\omega_i\omega_j - J_j^h\omega_i\omega_k - J_k^h||\omega||^2 g_{ij} \\ & + J_j^h||\omega||^2 g_{ik} + J_s^h\omega^s\omega_k g_{ij} - J_s^h\omega^s\omega_j g_{ik}) + \frac{1}{2}(\delta_j^h J_i^t\omega_{t,k} - \delta_k^h J_i^t\omega_{t,j} \\ & - \omega^h_{,k} J_{ij} + \omega^h_{,j} J_{ik} - J_j^h\omega_{i,k} + J_k^h\omega_{i,j} + J_t^h\omega^t_{,k} g_{ij} - J_t^h\omega^t_{,j} g_{ik}) \\ & = J_t^h R_{ijk}^t - J_i^h R_{tjk}^h, \end{aligned}$$

а також аналітичність контраваріантного вектору ξ , що є представленою рівнянням (14). Якщо ми згадаємо вираз для обчислення похідної Лі довільного тензора (10), то бачимо, що (28) можна записати коротше:

$$\begin{aligned} \rho_{i,j} = & \frac{1}{2}\omega^t \rho_t g_{ij} - \frac{1}{2}\rho_i \omega_j - \frac{1}{2}\rho_j \omega_i \\ & + \frac{1}{n+2}\mathfrak{L}_\xi(R_{ij} - \frac{(n-2)}{2}(\omega_{i,j} + \frac{\omega_i\omega_j}{2} - \frac{||\omega||^2 g_{ij}}{2}) - \frac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2}) \quad (29) \end{aligned}$$

Таким чином, ми можемо записати систему рівнянь, які на ЛКК-многовиді (M^n, J, g) визначають конформно-голоморфно-проективні ін-

фінітезимальні перетворення із збереженням комплексної структури:

$$1) \xi_{i,j} = \xi_{ij};$$

$$2) \rho_i = \rho_i;$$

$$3) \xi_{i,jk} = \xi_\alpha R_{kji}^\alpha + \frac{1}{2} ((\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,k} g_{ij} + (\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,j} g_{ik} - (\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,i} g_{jk}) \\ + \rho_j g_{ik} + \rho_k g_{ij} - \rho_t J_j^t J_{ik} - \rho_t J_k^t J_{ji};$$

$$4) \rho_{i,j} = \frac{1}{2} \omega^t \rho_t g_{ij} - \frac{1}{2} \rho_i \omega_j - \frac{1}{2} \rho_j \omega_i + \frac{1}{n+2} \mathfrak{L}_\xi (R_{ij} \\ - \frac{(n-2)}{2} (\omega_{i,j} + \frac{\omega_i \omega_j}{2} - \frac{\|\omega\|^2 g_{ij}}{2}) - \frac{\Delta_2 \omega g_{ij}}{2});$$

$$5) \mathfrak{L}_\xi J_j^i = \xi^k \nabla_k J_j^i - J_j^\alpha \nabla_\alpha \xi^i + J_\alpha^i \nabla_j \xi^\alpha = 0$$

Зауважимо, що рівняння (29) у певних частинних випадках матиме трохи простіший вигляд. Наприклад, на многовидах Вайсмана (узагальнених многовидах Хопфа) воно виглядає як

$$\rho_{i,j} = \frac{1}{2} \omega^t \rho_t g_{ij} - \frac{1}{2} \rho_i \omega_j - \frac{1}{2} \rho_j \omega_i \\ + \frac{1}{n+2} \mathfrak{L}_\xi (R_{ij} - \frac{(n-2)}{4} (\omega_i \omega_j - \|\omega\|^2 g_{ij})).$$

У випадку псевдовайсманових многовидів, це рівняння запишемо так:

$$\rho_{i,j} = \frac{1}{2} \omega^t \rho_t g_{ij} - \frac{1}{2} \rho_i \omega_j - \frac{1}{2} \rho_j \omega_i \\ + \frac{1}{n+2} \mathfrak{L}_\xi (R_{ij} - \frac{(n-2)}{4} (\omega_i \omega_j + n \|\omega\|^2 g_{ij})).$$

6 Тензор Нейенхейса та форма Лі при конформно голоморфно-проективних інфінітезимальних перетвореннях

Знайдемо похідну Лі тензора Нейенхейса:

$$N_{ij}^h = J_i^\alpha (J_{\alpha,j}^h - J_{j,\alpha}^h) - J_j^\alpha (J_{\alpha,i}^h - J_{i,\alpha}^h) = 0.$$

Якщо ми вимагаємо збереження комплексної структури, похідна Лі тензора Нейенхейса має вигляд:

$$\mathfrak{L}_\xi N_{ij}^h = J_i^\alpha (\mathfrak{L}_\xi J_{\alpha,j}^h - \mathfrak{L}_\xi J_{j,\alpha}^h) - J_j^\alpha (\mathfrak{L}_\xi J_{\alpha,i}^h - \mathfrak{L}_\xi J_{i,\alpha}^h). \quad (30)$$

внаслідок (14).

Внаслідок вимоги зберігання комплексної структури (14)), а також, і (23), підставивши у (15), отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_\xi J_{i,j}^h &= J_i^t \left(\frac{1}{2} (\delta_j^h (\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,t} + \delta_t^h (\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,j} - g^{hr} (\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,r} g_{tj}) \right. \\ &\quad \left. + \rho_j \delta_t^h + \rho_t \delta_j^h - \rho_s J_i^s J_j^h - \rho_s J_j^s J_t^h \right) \\ &\quad - J_t^h \left(\frac{1}{2} (\delta_j^t (\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,i} + \delta_i^t (\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,j} - g^{tr} (\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,r} g_{ij}) \right. \\ &\quad \left. + \rho_j \delta_i^t + \rho_i \delta_j^t - \rho_s J_i^s J_j^t - \rho_s J_j^s J_i^t \right) = \\ &= \frac{1}{2} (\delta_j^h J_i^\alpha \varphi_\alpha - \varphi^h J_{ij} - J_j^h \varphi_i + J_\alpha^k \varphi^\alpha g_{ij}),\end{aligned}\quad (31)$$

де $\varphi_i = (\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,i}$. Обчислимо похідну Лі тензора Нейенхейса уздовж векторного поля ξ , враховуючи (31):

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_\xi N_{ij}^k &= J_i^\alpha (\mathfrak{L}_\xi J_{\alpha,j}^k - \mathfrak{L}_\xi J_{j,\alpha}^k) - J_j^\alpha (\mathfrak{L}_\xi J_{\alpha,i}^k - \mathfrak{L}_\xi J_{i,\alpha}^k) = \\ &= \frac{1}{2} J_i^\alpha (\delta_j^k J_\alpha^\beta \varphi_\beta - \varphi^k J_{\alpha j} - J_j^k \varphi_\alpha + J_\beta^k \varphi^\beta g_{\alpha j} - \\ &\quad - \delta_\alpha^k J_j^\beta \varphi_\beta + \varphi^k J_{j\alpha} + J_\alpha^k \varphi_j - J_\beta^k \varphi^\beta g_{j\alpha}) - \\ &\quad - \frac{1}{2} J_j^\alpha (\delta_i^k J_\alpha^\beta \varphi_\beta - \varphi^k J_{\alpha i} - J_i^k \varphi_\alpha + J_\beta^k \varphi^\beta g_{\alpha i} - \\ &\quad - \delta_\alpha^k J_i^\beta \varphi_\beta + \varphi^k J_{i\alpha} + J_\alpha^k \varphi_i - J_\beta^k \varphi^\beta g_{i\alpha}).\end{aligned}\quad (32)$$

Розкриваючи дужки та зводячи подібні у (32), отримуємо, що похідна Лі тензора Нейенхейса тотожно дорівнює нулю:

$$\mathfrak{L}_\xi N_{ij}^k = 0.$$

Враховуючи той факт, що будь-які інфінітезимальні перетворення зберігають замкненість форми Лі, отримуємо наступне твердження.

Теорема 2 При інфінітезимальних конформно-голоморфно-проективних перетвореннях ЛКК-многовидів, що зберігають комплексну структуру, тензор Нейенхейса також зберігається.

Тепер знайдемо похідну Лі форми Лі. Враховуючи (14), отримуємо з (6):

$$\mathfrak{L}_\xi \omega_i = -\frac{2}{n-2} \mathfrak{L}_\xi (J_{\beta,\alpha}^\alpha J_i^\beta) = -\frac{2}{n-2} \mathfrak{L}_\xi (J_{\beta,\alpha}^\alpha) J_i^\beta. \quad (33)$$

З іншого боку, оскільки операція диференціювання Лі є переставним із згортоку, маємо з (32), згортаючи індекси k та j :

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_\xi J_{i,\alpha}^\alpha &= \frac{1}{2} (n J_i^\beta \varphi_\beta - \varphi^\alpha J_{i\alpha} - J_\alpha^\alpha \varphi_i + J_\beta^\alpha \varphi^\beta g_{i\alpha}) = \\ &= \frac{1}{2} (n J_i^\beta \varphi_\beta - \varphi^\alpha J_{i\alpha} + J_{\beta i} \varphi^\beta) = \\ &= \frac{1}{2} (n J_i^\beta \varphi_\beta - \varphi^\alpha J_{i\alpha} - J_{i\beta} \varphi^\beta) = \frac{n-2}{2} J_i^\beta \varphi_\beta.\end{aligned}\quad (34)$$

Підставимо (34) в (33). Отримуємо:

$$\mathcal{L}_\xi \omega_i = -\frac{2}{n-2} \cdot \frac{n-2}{2} J_\gamma^\beta \varphi_\beta J_i^\gamma = \varphi_i = (\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,i}.$$

Ця рівність виконується тривіально на ЛКК-многовидах внаслідок того, що на них форма Лі є замкнутою: $d\omega = 0$.

7 Гомотетії та конформно голоморфно-проективні інфінітезимальні перетворення

Розглянемо (28). Ми бачимо, що у випадку $\omega_\alpha \xi^\alpha = 0$, або, навіть $\omega_\alpha \xi^\alpha = \text{const}$, ця формула прийме вигляд

$$\mathcal{L}_\xi \Gamma_{ij}^h = \rho_j \delta_i^h + \rho_i \delta_j^h - \rho_t J_i^t J_j^h - \rho_t J_j^t J_i^h.$$

Згідно з Теоремою 1, в такому випадку векторне поле ξ генеруватиме гомотетію, або ізометрію. З іншого боку відомо, що комутатор векторних полів $[\xi, \eta]$ буде всюди дотичним до гіперповерхні, якщо до неї всюди дотичні поля ξ та η [1, с. 201] – один з варіантів формулювання відомої теореми Фробеніуса. Звідси випливає теорема.

Теорема 3 *Якщо на ЛКК-многовиді $\{M_n, J, g\}$, $n = 2m$ алгебра Лі інфінітезимальних конформно голоморфно-проективних векторних полів ξ , містить таку підалгебру векторних полів, що всюди $\omega_\alpha \xi^\alpha = 0$, і таким чином, всюди дотичних до сімейства гіперповерхонь, що відповідають рівнянню $\omega = 0$, то така підалгебра генеруватиме підгрупу гомотетій цього ЛКК-многовиду. Ці гіперповерхні будуть орбітами цієї підгрупи.*

Література

1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: методы и приложения / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко- М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. - 760 с.
2. Кириченко В. Ф. Конформно-плоские локально конформно-келеровы многообразия / В. Ф. Кириченко // Матем. сб.–1992. Т. 51, №5. –С. 57–66.
3. Кириченко В. Ф., Никифорова А. В. О голоморфно-проективных преобразованиях почти эрмитовых структур / В. Ф. Кириченко// УМН, 56:6(342) (2001), с.149–150
4. Лихнерович А. Теория связностей в целом и группы голономии / А. Лихнерович– М., ИЛ, 1960, –216с.
5. Микеш Й. Голоморфно-проективные отображения и их обобщения /Й. Микеш// Геометрия – 3, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 30, ВИНТИ, М., 2002, 258–289
6. Mikeš J., Chuda H., Hinterleitner I Conformal holomorphically projective mappings of almost Hermitian manifolds with a certain initial condition. /J. Mikeš // – International Journal of Geometric Methods in Modern Physics Vol. 11, No. 5, 2014 8 p.

7. Chud'ya H., Shina. M. Conformal holomorphically projective mappings. / *H. Chud'ya* // Miskolc Mathematical Notes, Vol. 14 – 2013, No. 2, pp. 569–574
8. Dragomir S., Ornea L. Locally conformal Kähler geometry / *S. Dragomir* – Boston ; Basel ; Berlin: Birkhäuser – 1998, 328p
9. Ishihara S. Holomorphically projective changes and their groups in an almost complex manifold. / *S. Ishihara* – Tohoku Math. J. (2) 9 (1957), no. 3, pp. 273–297.
10. Mikeš J. *et al.* Differential geometry of special mappings. / *J. Mikeš* – Olomouc: Palacky University, 2015, 566 p.
11. Radulovich Zh., Mikeš J. Geodesic and holomorphically-projective mappings of conformally-Kählerian spaces / *Zh. Radulovich* // Opava: Silesian Univ. Math. Publ. 1 – 1993 c. 151–156.
12. Tachibana S. Ishihara S. On infinitesimal holomorphically projective transformations in kahlerian manifolds. / *S. Tachibana S. Ishihara* – Tohoku Math. J. (2) 12 (1960), no. 1, 77–101.
13. Vaisman I. On locally conformal almost Kähler manifolds / *I. Vaisman* // Israel J. Math. – 1976 №24 C. 338–351.
14. Yano K. Differential geometry on complex and almost complex spaces / *K. Yano* – New York: Pergamon Press Book – 1965, 326p.
15. Yano K. The Theory Of Lie Derivatives And Its Applications / *K. Yano* – Amsterdam: North Holland Publishing Company – 1957, 321p.

Є. В. Черевко

Одеський національний економічний університет, Одеса, Україна.

E-mail: cherevko@usa.com

Yevhen Cherevko

Holomorphically projective transformations and locally conformal Kaehler manifolds

In the article we study conformal holomorphically projective transformations of locally conformal Kaehler manifolds. Also we obtain a system of partial differential equations which determined the transformations.

Надійшла до редколегії

20.1.2016