Леонид Евгеньевич Евтушик – геометр

Памяти товарища и друга

М. О. Рахула

1. Дифференциальные продолжения

Всё началось, когда молодой Сергей Фиников вернулся из Парижа в Москву (1916). В Сорбонне он слушал лекции Эли Картана и настолько увлёкся услышанным, что многие труды Картана впоследствии были им переведены и переизданы на русский язык. Идеи Картана разошлись по университетам страны. По методу Картана проводились многочисленные исследования и писались монографии.

Из московской дифференциально-геометрической школы Сергея Павловича Финикова выросла плеяда замечательных геометров: Г.Ф. Лаптев, А.М. Васильев, Н.М. Остиану, М.В. Ауссен, Л.Е. Евтушик, К. Гринчевичус, М.А. Акивис, В.И. Близникас, Ю.Г. Лумисте, Н.Г. Туганов, В.С. Малаховский и др. Их последователи применяют теорию Картана-Финикова во многих областях математики, механики и физики.

* * *

Дифференциальная геометрия началась во времена Ньютона и Лейбница, когда в геометрии стали применять производные. Со временем она стала самостоятельным научным направлением и в настоящее время сущность дифференциальной геометрии можно выразить кратко следующими словами: дифференциальные продолжения различных структур на гладких многообразиях.

К теме дифференциальных продолжений подходят разными путями.

Во-первых, в основу теории кладутся струи гладких отображений. Идеи исчисления струй восходят к Ш. Эресману и разрабатываются главным образом чешской геометрической школой, см. [5, 6, 9, 12, 16].

Во-вторых, на дифференциалах координатных функций В. В. Вагнером были введены расслоения, размерность которых при каждом продолжении возрастает на размерность исходного многообразия¹. Расслоения Вагнера широко применяются в румынской геометрической школе, в частности, при изучении вопросов, связанных с финслеровой геометрией и лагранжевой механикой, см. [2, 11, 19].

В-третьих, по линии Картана-Финикова выработана т. н. теория продолжений и охватов, которую по-праву связывают с именем Г. Ф. Лаптева. Эта теория развивается и обобщается в трудах Л. Е. Евтушика, см. [20].

* * *

---

¹В книге [2] эти расслоения называются соприкасающимися расслоениями. Мы, отдавая дань первооткрывателю, будем их называть расслоениями Вагнера.

Обозреваемые проблемы геометрии охватываются таким понятием, как касательный функтор T , который многообразиям M сопоставляет их касательные расслоения TM – *этажи*, и гладким отображениям f их касательные отображения Tf – *дифференциалы*, [3, 7, 13]. При переходе с очередного этажа на следующий этаж размерность каждый раз удваивается. Дифференциальные продолжения обеспечиваются итерациями функтора T . Исчисление струй сочетается с теорией сектор-форм Уайта на этажах, так как струи входят в качестве коэффициентов в сектор-формы, [18]. Классические структуры, которые строятся на расслоениях Вагнера, индуцируются, по правде говоря, геометрией этажей, так как расслоения Вагнера – подрасслоения этажей, [1]. Так, например, механика Гамильтона, которая строится на втором этаже, в расслоении Вагнера сводится к механике Лагранжа, см. [8, 15]. В пользу этажей следует добавить, что k -ый этаж $T^k M$ является k -кратным векторным расслоением и такая структура лежит в основе теории высших движений, которой принадлежит, по-видимому, будущее в развитии кинематики. Если вектор к траектории трактовать как "стоп-кадр" движущейся точки, а векторное поле – как "стоп-кадр" потока, где точки перемещаются по траекториям, то элемент этажа трактуется как "стоп-кадр" движения высшего порядка. Представим, что на один поток оказывает воздействие второй поток, на этот процесс оказывает влияние третий поток, и т.д. Это приводит нас не к повторному дифференцированию, как обычно и ошибочно понимают дифференциальные продолжения, а к преобразованию дифференцирований и дифференцированию дифференцирований. Если обычно имеем дело, скажем, с производными $f, f', f'', \dots$ относительно некоторого векторного поля X , то здесь имеются в виду операторы $X, \mathcal{L}_X, \mathcal{L}_{\mathcal{L}_X}, \dots$, как векторные поля на этажах. В этом заключается иной и более глубокий смысл дифференциальных продолжений.

2. Связность в расслоении

Ключевым моментом в дифференциальной геометрии является понятие связности. Согласно Эресману [4], связность в расслоении $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} M$ понимается как структура $\Delta_h \oplus \Delta_v$ на многообразии $\mathcal{M}$, где $\Delta_v = \ker T\pi$ – касательное к слоям вертикальное распределение и Δ_h – горизонтальное распределение, дополнительное к вертикальному.

На локальной окрестности $U \subset \mathcal{M}$ координаты (u^i, u^α) согласованы со слоями, где u^i – базисные, а u^α – слоевые. Адаптируется базис структуры $\Delta_h \oplus \Delta_v$:

$$(X_i \ X_\alpha) = \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \ \frac{\partial}{\partial u^\beta} \right) \cdot \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 \\ \Gamma_j^\alpha & \delta_\beta^\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \omega^i \\ \omega^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 \\ -\Gamma_j^\alpha & \delta_\beta^\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} du^j \\ du^\beta \end{pmatrix}.$$

Операторы X_i образуют векторный базис распределения Δ_h , а формы ω^α аннулируются распределением Δ_h :

$$X_i = \frac{\partial}{\partial u^i} + \Gamma_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad \omega^\alpha = du^\alpha - \Gamma_i^\alpha du^i.$$

Кривизна связности определяется скобками $[X_i X_j]$, и также внешними дифференциалами $d\omega^\alpha$.

Система Пфаффа устанавливает связь с дифференциальными уравнениями:

$$\omega^\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u^\alpha}{\partial u^i} = \Gamma_i^\alpha.$$

Величины Γ_i^α , вообще говоря, зависят от всех координат, базисных и слоевых. В случае векторного расслоения и линейной связности они линейны на слоях: $\Gamma_i^\alpha = \Gamma_{i\beta}^\alpha u^\beta$. Классическая аффинная связность понимается как линейная связность в касательном расслоении $TM \xrightarrow{\pi} M$. Тогда величины Γ_i^α обращаются в систему форм $\Gamma_{jk}^i du^k$.

*   *   *

Фундаментальные объекты отображения по Г. Ф. Лаптеву [10] появляются в общем контексте. Рассмотрим морфизм расслоений со связностями:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{M}_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array}$$

Стрелками π_1 и π_2 в диаграмме обозначены два расслоения. Пара отображений (φ, f) определяет морфизм этих расслоений. Предполагается, что на многообразиях $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ заданы структуры $\Delta_h \oplus \Delta_v$ и $\tilde{\Delta}_h \oplus \tilde{\Delta}_v$.

На окрестностях U и $\varphi(U)$, где заданы координаты (u^i, u^α) и $(u^{i'}, u^{\alpha'})$, определяются адаптированные базисы – с коэффициентами Γ_i^α и $\Lambda_{i'}^{\alpha'}$ соответственно, или же: $\Gamma_i^\alpha = \Gamma_{i\beta}^\alpha u^\beta$, $\Lambda_{i'}^{\alpha'} = \Lambda_{i'\beta'}^{\alpha'} u^{\beta'}$ в случае линейных связностей.

Касательное отображение $T\varphi$ определяется одной и той же вектор-формой $\mathcal{F}$ в натуральных и адаптированных базисах:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial u^{i'}} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha'}} \right) \cdot \begin{pmatrix} f_j^{i'} & 0 \\ \varphi_j^{\alpha'} & \varphi_\beta^{\alpha'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} du^j \\ du^\beta \end{pmatrix} \\ &= (X_{i'} \ X_{\alpha'}) \cdot \begin{pmatrix} f_j^{i'} & 0 \\ \Phi_j^{\alpha'} & \varphi_\beta^{\alpha'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} du^j \\ du^\beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В натуральных базисах отображение $T\varphi$ определяется блок-матрицей Якоби, где блоки $f_j^{i'}, \varphi_j^{\alpha'}, \varphi_\beta^{\alpha'}$ образованы частными производными функций $f^{i'}, \varphi^{\alpha'}$. В адаптированных базисах блок $\varphi_j^{\alpha'}$ заменяется блоком

$$\Phi_j^{\alpha'} = \varphi_j^{\alpha'} + \varphi_\gamma^{\alpha'} \Gamma_j^\gamma - \Lambda_{k'}^{\alpha'} f_j^{k'}.$$

В частности, когда связности – линейные, эти величины линейны на слоях, именно $\Phi_j^{\alpha'} = \Phi_{j\beta}^{\alpha'} u^\beta$, и появляется объект:

$$\Phi_{j\beta}^{\alpha'} = \varphi_{j\beta}^{\alpha'} + \varphi_\gamma^{\alpha'} \Gamma_{j\beta}^\gamma - \Lambda_{k'\gamma'}^{\alpha'} f_j^{k'} \varphi_\beta^{\gamma'}.$$

В случае, когда $\varphi = Tf$, $\mathcal{M}_i = TM_i$, $i = 1, 2$, этот объект, после некоторых изменений в обозначениях, приводится к виду:

$$\boxed{F_{ij}^\alpha = f_{ij}^\alpha - f_k^\alpha \Gamma_{ij}^k + (\Lambda_{\beta\gamma}^\alpha \circ f) f_i^\beta f_j^\gamma}.$$

Имеем универсальный тензорный объект F_{ij}^α , характеризующий вторую дифференциальную окрестность отображения f . Правда, при этом возникает вопрос: откуда взять связности, чтобы построить такой объект? В ряде случаев эти связности фиксируются специально. По этому поводу выскажем некоторые соображения.

– В равенстве $F_{ij}^\alpha = 0$ распознаём при $\dim M_1 = 1$ уравнение геодезической линии на многообразии M_2 . Входим в *теорию геодезических*.

– Объект F_{ij}^α определяет при отображении T^2f отклонение образа распределения Δ_h от горизонтального положения в структуре $\tilde{\Delta}_h \oplus \tilde{\Delta}_v$. При $F_{ij}^\alpha = 0$ распределение Δ_h укладывается в распределение $\tilde{\Delta}_h$ и геодезические с многообразия M_1 отображаются в геодезические на многообразии M_2 . Сказанное относится к *теории геодезических отображений*.

– При диффеоморфизме $M \xrightarrow{a} M$ происходит преобразование пространства M со связностью Γ_{ij}^k . Объект F_{ij}^α записывается в виде:

$$A_{ij}^k = a_{ij}^k - a_l^k \Gamma_{ij}^l + (\Gamma_{pq}^k \circ a) a_i^p a_j^q.$$

При равенстве $A_{ij}^k = 0$ преобразование a является симметрией распределения Δ_h , что в классической теории называется *движением в пространстве со связностью*.

– Пусть векторное поле X имеет в пространстве M поток $a_t = \exp tX$. В потоке a_t увлекается горизонтальное распределение:

$$\Delta_h \rightsquigarrow Ta_t \Delta_h \rightsquigarrow \mathcal{L}_X \Delta_h.$$

Заменим в объекте A_{ij}^k диффеоморфизм a на a_t и осуществим дифференцирование по параметру t при $t = 0$. Получаем выражение о пяти слагаемых, определяющее *производную Ли связности* $\mathcal{L}_X \Gamma_{ij}^k$, лучше обозначать $\mathcal{L}_X \Delta_h$. Когда $\mathcal{L}_X \Delta_h = 0$, векторное поле X является инфинитезимальной симметрией распределения Δ_h . В метрической теории такое векторное поле известно как *поле Киллинга*.

В отдельных случаях происходит фиксация связностей.

– Если $M_1 \xrightarrow{f} M_2$ – иммерсия некоторого многообразия M_1 в евклидово пространство M_2 , то образ этой иммерсии является поверхностью и на этой поверхности возникает *риманова геометрия*. Вводим в объект F_{ij}^α нулевую связность $\Lambda_{\beta\gamma}^\alpha = 0$, что в евклидовом пространстве имеет инвариантный смысл, определяем метрику $g_{ij} = f_i^\alpha f_j^\alpha$, выводим из условия $f_k^\alpha F_{ij}^\alpha = 0$ символы Кристоффеля Γ_{jk}^i , в нормальной плоскости осуществляем разложение $F_{ij}^\alpha = n_\lambda^\alpha h_{ij}^\lambda$, имеем пучок квадратичных форм h_{ij}^λ , что в случае гиперповерхности даёт вторую квадратичную форму, и получаем основную формулу теории поверхностей – *формулу Гаусса* $f_{ij}^\alpha = f_k^\alpha \Gamma_{ij}^k + n_\lambda^\alpha h_{ij}^\lambda$.

– Если $M_1 \xrightarrow{f} M_2$ – субмерсия евклидова пространства M_1 на многообразии M_2 , то в семействе слоёв в M_1 возникает двойственная ситуация, называемая *ко-римановой геометрией*², см. [1, 14]. Полагаем $\Lambda_{ij}^k = 0$, вводим ко-метрику $g^{\alpha\beta} = f_i^\alpha f_i^\beta$, определяем символы ко-Кристоффеля $\Lambda_{\beta\gamma}^\alpha$ и получаем тензорный объект F_{ij}^α . Теория включает такие понятия, как лапласиан, гессиан и др.

²Шутка М. Спивака: когда он выводил уравнения, двойственные известным уравнениям Гаусса-Кодацци, он их называл уравнениями Даддци-ко-Гаусса.

3. Тест Картана

Тест Картана заключается в том, что в результате внешнего дифференцирования уравнений и применения леммы Картана получают для изучения свойств отображения нужный объект. Так получают объект F_{ij}^α с фиксированными связностями Γ_{ij}^k и $\Lambda_{\alpha\beta}^\gamma$. Разберём это более подробно.

Дело в том, что связности на этаже TM могут быть определены заданием на многообразии M неголономного базиса Схоутена [17] – поля реперов и дуальных кореперов (R, Θ) . В самом деле, векторное поле X можно поднять с многообразия M на этаж TM по принципу $X \rightsquigarrow X^{(1)}$ (продолжается поток $a_t \rightsquigarrow Ta_t$), а 1-форма определяет на TM дифференциал $\Phi \rightsquigarrow d\Phi$ (различаем дифференциал скалярной функции $d\Phi$ и внешний дифференциал 1-формы $d\Phi$). Это относится и к базису (R, Θ) . Поднятый на этаж TM репер $R^{(1)}$ определяет на TM одно горизонтальное распределение Δ_h , а дифференциал корепера $d\Theta$ определяет второе горизонтальное распределение $\bar{\Delta}_h$. Две связности образуют пучок связностей:

$$\frac{\lambda\Gamma_{ij}^k + \mu\bar{\Gamma}_{ij}^k}{\lambda + \mu},$$

в котором выделяется бесчисленное множество связностей. При $\lambda = \mu = 1$ в пучке выделяется интересующая нас связность.

* * *

С координатами (u^i, u_1^i) на окрестности $TU \subset TM$ ассоциируется натуральный базис³:

$$\partial_i \doteq \frac{\partial}{\partial u^i}, \quad \partial_i^{(1)} \doteq \frac{\partial}{\partial u_1^i}; \quad u_2^i \doteq du^i, \quad u_{12}^i \doteq du_1^i.$$

Рассмотрим базис распределения Δ_h и кобазис распределения $\bar{\Delta}_h$, с коэффициентами Γ_{ij}^k и $\bar{\Gamma}_{ij}^k$, пока нефиксированными:

$$X_i = \partial_i - \Gamma_{ij}^k u_1^j \partial_k^{(1)}, \quad \bar{\omega}_{12}^i = u_{12}^i + \bar{\Gamma}_{kj}^i u_1^j u_2^k.$$

Представим поднятие векторного поля X и дифференциал 1-формы Φ следующим образом:

$$\begin{aligned} X = x^i \partial_i &\Rightarrow X^{(1)} = x^i \partial_i + \partial_j x^i u_1^j \partial_i^{(1)} = x^i X_i + (\partial_j x^k + \Gamma_{ij}^k x^i) u_1^j \partial_k^{(1)}, \\ \Phi = \varphi_i u_1^i &\Rightarrow d\Phi = \partial_j \varphi_i u_1^i u_2^j + \varphi_i u_{12}^i = (\partial_i \varphi_j - \varphi_k \bar{\Gamma}_{ij}^k) u_1^j u_2^i + \varphi_i \bar{\omega}_{12}^i. \end{aligned}$$

Появляются ковариантные производные, см. в скобках, и выясняется смысл обращения их в нуль:

- поднятие $X^{(1)}$ принадлежит распределению Δ_h тогда и только тогда, когда $\partial_j x^k + \Gamma_{ij}^k x^i = 0$,
- дифференциал $d\Phi$ аннулирует распределение $\bar{\Delta}_h$ тогда и только тогда, когда $\partial_i \varphi_j - \varphi_k \bar{\Gamma}_{ij}^k = 0$.

---

³Координаты на окрестностях U, TU, T^2U определяются итеративно, см. [1], стр. 28: $u^i \rightsquigarrow (u^i, u_1^i) \rightsquigarrow (u^i, u_1^i, u_2^i, u_{12}^i)$.

Базис (R, Θ) определяет две связности. Поднятия операторов репера $R_i = \bar{A}_i^j \partial_j$ определяют распределение Δ_h , а дифференциалы форм корепера $\Theta^i = A_j^i u_1^j$ аннулируются распределением $\bar{\Delta}_h$. Вторая связность имеет нулевую кривизну. Взаимно обратные матрицы (A_j^i) и $(\bar{A}_i^j)$ определяют на окрестности U базис (R, Θ) . Согласно сказанному, коэффициенты Γ_{ij}^k и $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ фиксируются однозначно:

$$\begin{aligned}\partial_j \bar{A}_l^k + \Gamma_{ij}^k \bar{A}_l^i &= 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{ij}^k = \bar{A}_l^k \partial_j A_l^i, \\ \partial_i A_j^l - A_k^l \bar{\Gamma}_{ij}^k &= 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\Gamma}_{ij}^k = \bar{A}_l^k \partial_i A_j^l.\end{aligned}$$

Таким образом, базис (R, Θ) определяет на многообразии M две аффинные связности.

В пучке этих связностей при $\lambda = \mu = 1$ выделяется связность с коэффициентами

$$\gamma_{ij}^k = \bar{A}_l^k \partial_{(i} A_{j)}^l.$$

* * *

Рассмотрим отображение $M_1 \xrightarrow{f} M_2$. Зададим на многообразиях M_1 и M_2 неголономные базисы⁴:

$$\begin{aligned}(R_i, \theta^j) &\rightsquigarrow R_i = \partial_j \bar{A}_i^j, \quad \theta^j = A_i^j du^i, \\ (R_\alpha, \theta^\beta) &\rightsquigarrow R_\alpha = \partial_\beta \bar{B}_\alpha^\beta, \quad \theta^\beta = B_\alpha^\beta dv^\alpha.\end{aligned}$$

Латинские индексы соотносятся к окрестности $U_1 \subset M_1$, а греческие – к окрестности $U_2 = f(U_1) \subset M_2$. Объекты неголономности c_{ij}^k и $c_{\alpha\beta}^\gamma$ присутствуют в уравнениях структуры:

$$d\theta^k = -\frac{1}{2} c_{ij}^k \theta^i \wedge \theta^j, \quad d\theta^\gamma = -\frac{1}{2} c_{\alpha\beta}^\gamma \theta^\alpha \wedge \theta^\beta.$$

Отображение f определяется локально системой $v^\alpha \circ f = f^\alpha$. Дифференциал Tf определяется в естественном и неголономном кобазисах системами ДУ:

$$\begin{aligned}dv^\alpha \circ Tf &= f_i^\alpha du^i, \quad f_i^\alpha \doteq \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^i}, \\ \theta^\alpha \circ Tf &= F_i^\alpha \theta^i, \quad F_i^\alpha \doteq (B_\beta^\alpha \circ f) f_j^\beta \bar{A}_i^j.\end{aligned}$$

Первая система записана локально на окрестности U_1 , а вторая имеет глобальный смысл. Запишем вторую систему проще в виде $\theta^\alpha = F_i^\alpha \theta^i$.

Над этой системой и производится *процедура по Картану*. Осуществим внешнее дифференцирование системы и применим лемму Картана:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} c_{\beta\gamma}^\alpha F_i^\beta F_j^\gamma \theta^i \wedge \theta^j &= dF_j^\alpha \wedge \theta^j - \frac{1}{2} F_k^\alpha c_{ij}^k \theta^i \wedge \theta^j, \\ (dF_j^\alpha - \frac{1}{2} F_k^\alpha c_{ij}^k \theta^i \wedge \theta^j + \frac{1}{2} c_{\beta\gamma}^\alpha F_i^\beta F_j^\gamma \theta^i) \wedge \theta^j &= 0, \\ dF_j^\alpha &= \left(\frac{1}{2} F_k^\alpha c_{ij}^k - \frac{1}{2} c_{\beta\gamma}^\alpha F_i^\beta F_j^\gamma + \lambda_{ij}^\alpha \right) \theta^i = X_i F_j^\alpha \theta^i.\end{aligned}$$

---

⁴Неголономный базис определяется на вполне параллелизуемом многообразии глобально, или же на вполне параллелизуемой области многообразия.

Появляются коэффициенты, симметрические по нижним индексам:

$$\lambda_{ij}^\alpha = X_{(i} F_{j)}^\alpha.$$

Если вычислить производные $X_i F_j^\alpha$ и просимметризовать, получим в коэффициентах λ_{ij}^α объект F_{ij}^α со связностями γ_{ij}^k и $\gamma_{\mu\nu}^\alpha$:

$$\lambda_{ij}^\alpha = (B_\beta^\alpha \circ f) F_{kl}^\beta \bar{A}_i^k \bar{A}_j^l,$$

$$\boxed{F_{ij}^\alpha = f_{ij}^\alpha - f_k^\alpha \gamma_{ij}^k + (\gamma_{\mu\nu}^\alpha \circ f) f_i^\mu f_j^\nu}, \quad \text{где} \quad \gamma_{ij}^k = \bar{A}_s^k \partial_{(i} A_{j)}^s, \quad \gamma_{\mu\nu}^\alpha = \bar{B}_\sigma^\alpha \partial_{(\mu} B_{\nu)}^\sigma.$$

Объект λ_{ij}^α , имеющий, так же как неголономные базисы на многообразиях M_1 и M_2 и система ДУ $\theta^\alpha = F_i^\alpha \theta^i$, глобальный смысл, на окрестности U_1 выражается, как видим, через объект F_{ij}^α .

4. Подвижной репер

Таким образом, коэффициенты Γ_{ij}^k и $\Lambda_{\alpha\beta}^\gamma$ для объекта Лаптева определяются неголономными базисами Схоутена на многообразиях M_1 и M_2 , [17, 10]. Возникает очередной вопрос: как могут быть зафиксированы на многообразиях неголономные базисы? Вспомним метод Картана и идею подвижного репера. Когда репер увязывается со структурой многообразия, то это значит, что на многообразии фиксируется неголономный базис. В геометрических исследованиях можно встретить множество примеров по процедуре канонизации репера, например:

- репер Френе кривой: точка, касательная, нормаль, бинормаль.
- репер Дарбу поверхности: точка, касательная плоскость, главные направления, нормаль.
- проективный репер поверхности: точка, касательная плоскость, асимптотические направления, директрисы Вильчинского, и т.д.

В общем случае при каждом шаге фиксации репера на групповые параметры накладываются новые ДУ и процесс продолжается до тех пор, пока не доходят до единицы группы – тогда репер, как говорится, становится каноническим. Базис будет неголономным, так как иначе нельзя говорить, скажем, о кривизне поверхности и пр.

* * *

На связность имеется и более общая точка зрения, [1], стр. 79. Неголономный базис (R, Θ) специализируется в структуре $\Delta_h \oplus \Delta_v$ следующим образом. Часть операторов репера R_i направляется в горизонтальное распределение Δ_h , а часть R_α в вертикальное распределение Δ_v . Кроме того, операторы R_i считаются π -проектируемыми, чтобы облегчить горизонтальные поднятия и перенесение слоёв. Объект неголономности распадается на шесть подобъектов:

$$c_{ij}^k, c_{\alpha\beta}^k, c_{i\beta}^k, c_{ij}^\alpha, c_{i\beta}^\alpha, c_{\beta\gamma}^\alpha.$$

Из них два обращаются в нуль: $c_{\alpha\beta}^k = 0$, так как вертикальное распределение Δ_v вполне интегрируемо, и $c_{i\beta}^k = 0$, так как операторы R_i π -проектируемы и допускают распределение Δ_v . Подобъект c_{ij}^k поднят с базы: $c_{ij}^k = \bar{c}_{ij}^k \circ \pi$, а подобъект $c_{\beta\gamma}^\alpha$ в случае главного расслоения совпадает со структурными константами группы Ли, для которой слои – орбиты и поля (R_α) – операторы.

Особенно важны два подобъекта $c_{i\beta}^\alpha$ и c_{ij}^α . В адаптированном базисе только они сохраняются. В случае аффинной связности подобъект $c_{i\beta}^\alpha$ совпадает с величинами Γ_{ij}^k и подобъект c_{ij}^α будет линейным на слоях: $K_{ijk}^l du^k$, где K_{ijk}^l – тензор кривизны. В этом случае разговоры по поводу неголономного базиса могут быть сведены к сечению главного расслоения реперов.

Таким образом, в специализированном базисе наблюдается возникновение всех основных объектов теории связностей.

5. Обобщение

Мы рассмотрели структуру $\Delta_h \oplus \Delta_v$ на этаже TM и обсудили вопрос в связи с обычной аффинной связностью. По такой же схеме определяются высшие аффинные связности и строится последовательность фундаментальных объектов:

$$F_i^\alpha, F_{i_1 i_2}^\alpha, F_{i_1 i_2 i_3}^\alpha, \dots, F_{i_1 \dots i_k}^\alpha.$$

Объекты $F_i^\alpha, F_{i_1 i_2}^\alpha$ определялись выше. Следующий объект $F_{i_1 i_2 i_3}^\alpha$ появляется при морфизме вторых этажей. На втором этаже T^2M определяется структура

$$\Delta \oplus \Delta_1 \oplus \Delta_2 \oplus \Delta_{12}$$

– в каждой точке по четыре n -мерных площадки, $n = \dim M$. Этаж T^2M имеет размерность $4n$ и проектируется на этаж TM двумя различными способами ρ_1 и ρ_2 . При ρ_i вертикальным считается распределение $\Delta_i \oplus \Delta_{12}$, $i = 1, 2$. На T^2U строится неголономный базис. На окрестности T^2U он адаптируется к локальным координатам. Появляются коэффициенты типа $\Gamma_{i_1 i_2}^j, \Gamma_{i_1 i_2 i_3}^j$. При морфизме $T^2f : T^2M_1 \rightarrow T^2M_2$ появляется объект $F_{i_1 i_2 i_3}^\alpha$.

В случае расслоения Вагнера, имеющего размерность $3n$, начинают со структуры

$$\Delta_h \oplus \Delta_{hv} \oplus \Delta_v.$$

При первой проекции вертикальным является распределение Δ_v , при сквозной проекции – распределение $\Delta_{hv} \oplus \Delta_v$, см. [2].

В книге [14], стр. 160-168, определяются аффинные связности высшего порядка и выводятся, с преодолением характерной для подобной ситуации "вакханалии индексов" общая формула для объекта $F_{i_1 \dots i_k}^\alpha$. Такова точка зрения на высшие связности.

6. Экспоненциальный закон

Построим в пространстве бесконечных струй $J_{1,1}$ схему, которая повторяется таким же образом в пространстве $J_{m,n}$ для произвольных m и n , но в таком случае для записи формул нужно пользоваться мультииндексами. Короче, в пространстве бесконечных струй имеет место *экспоненциальный закон*, выраженный в четырёх импликациях.

Исходя из этой схемы, смысл первой главы работы Л. Е. Евтушика [20] становится в целом более чётким и понятным.

Импликация I : Оператор D

Введём бесконечные матрицы:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$e^{tC} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots \\ 0 & 1 & t & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad U_t = \begin{pmatrix} u_t \\ u'_t \\ u''_t \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad U' = \begin{pmatrix} u' \\ u'' \\ u''' \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} i_0 \\ i_1 \\ i_2 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial U} = \left(\frac{\partial}{\partial u} \quad \frac{\partial}{\partial u'} \quad \frac{\partial}{\partial u''} \cdots \right).$$

Здесь E – единичная матрица, C – т. н. матрица сдвига, e^{tC} – экспоненциал матрицы tC . Затем идут матрицы-столбцы U , U_t , U' , I , где U изображает точку слоя, U_t – траекторию этой точки в слое и U' – касательный вектор к этой траектории в точке U . О матрице-столбце I будет сказано ниже. Со слоевыми координатами U ассоциируется вертикальный репер – матрица-строка с операторами дифференцирования.

Важную роль в пространстве $J_{1,1}$ играет горизонтальное векторное поле – *оператор полного дифференцирования* (ОПД):

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + u' \frac{\partial}{\partial u} + u'' \frac{\partial}{\partial u'} + \dots,$$

или в матричной записи:

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial U} U'.$$

Штрихами обозначаются производные (ниже и производные Ли) относительно D .

Запишем двойную импликацию:

$$\boxed{U' = CU \Rightarrow U_t = e^{tC}U \Rightarrow I = e^{-tC}U.} \quad (\text{I})$$

Первая формула здесь понимается как ЛОДУ. Вторая формула даёт решение этого уравнения и заодно определяет поток поля D :

$$(t, U_t)'_{t=0} = (1, U') \text{ – компоненты } D.$$

Если во второй формуле произвести замену $t \rightsquigarrow -t$, получим функции I от параметра t и слоевых координат U , см. третью формулу, инвариантные относительно оператора D ,

$$I' = e^{-tC}(U' - CU) = 0.$$

Примечание 1. Если первую импликацию расписать:

$$\begin{pmatrix} u' \\ u'' \\ u''' \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \\ \vdots \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_t \\ u'_t \\ u''_t \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots \\ 0 & 1 & t & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \\ \vdots \end{pmatrix},$$

тогда вторая и третья формулы $U_t = e^{tC}U$ и $I = e^{-tC}U$ распишутся в системы:

$$u_t^{(p)} = \sum_{k=0}^{\infty} u^{(p+k)} \frac{t^k}{k!}, \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

$$i_p = \sum_{k=0}^{\infty} u^{(p+k)} \frac{(-t)^k}{k!}, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Формулы записаны для общей струи и вопрос о сходимости этих рядов не обсуждается. Если же речь идёт о конкретной функции u_t , то формула $U_t = e^{tC}U$ даёт для этой функции и всех её производных разложения в ряд Маклорена. В таком случае требуется, чтобы функция u_t была аналитической, т. е. дифференцируемой класса C^ω .

Примечание 2. Если говорить о бесконечной линейной группе $GL(\mathbb{R})$ и её алгебре Ли $gl(\mathbb{R})$, то экспоненциал e^{tC} понимается как 1-параметрическая подгруппа группы $GL(\mathbb{R})$, а матрица C как соответствующий элемент $gl(\mathbb{R})$.

Примечание 3. Рассмотрим на многообразии M векторное поле X с каноническим параметром s . Вычислим для функции f производные относительно поля X и составим из элементов $f, f', f'', \dots$ матрицу-столбец F . Определяется отображение

$$\varphi : M \rightarrow J_{1,1} : \begin{cases} t \circ \varphi = s, \\ U \circ \varphi = F. \end{cases}$$

Многообразие M будет погружено в пространство $J_{1,1}$ и векторное поле X окажется φ -связанным с оператором D – для произвольной функции I в пространстве $J_{1,1}$ на многообразии M будет выполняться равенство

$$X(I \circ \varphi) = (DI) \circ \varphi.$$

Отсюда следует $DI = 0 \Rightarrow X(I \circ \varphi) = 0$, т. е., если I – инвариант оператора D , тогда функция $I \circ \varphi$ будет инвариантом векторного поля X . Все инварианты оператора D , определяемые импликацией (I), переносятся на многообразие M в инварианты поля X ,

$$I = e^{-Ct}U \rightsquigarrow I \circ \varphi = e^{-Cs}F.$$

В частности, если $f^{(n)} \doteq X^n f$ – отличный от нуля инвариант поля X , тогда $f^{(n-1)}$ будет первообразной инварианта $f^{(n)}$, и для поля X определяется канонический параметр $s = f^{(n-1)} : f^{(n)}$. Функция f в потоке поля X будет полиномом степени n и это правило даёт нам $n + 1$ инвариантов поля X . Входим в теорию полиномиальных инвариантов.

Импликация II : Формы Картана

С оператором полного дифференцирования D в расслоении $J_{1,1}$ ассоциируется система *форм Картана* ω :

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial U} U', \quad \omega = dU - U' dt.$$

В расписанном виде имеем последовательность⁵, где каждая последующая форма является производной Ли относительно D предыдущей формы:

$$\begin{aligned} \omega &= du - u' dt, \\ \omega' &= du' - u'' dt, \\ \omega'' &= du'' - u''' dt, \\ &\dots \quad \dots \end{aligned}$$

Именно, если в натуральном репере оператор $\frac{\partial}{\partial t}$ заменить на оператор D , то в дуальном корепере дифференциалы dU заменятся автоматически на формы ω :

$$\left(D \quad \frac{\partial}{\partial U} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial U} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U' & E \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} dt \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -U' & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dt \\ dU \end{pmatrix}.$$

В расслоении $J_{1,1}$ определяется адаптированный базис линейной связности.

Аналогично импликации (I), которая была записана для слоевых координат U , для форм Картана записывается импликация:

$$\boxed{\omega' = C\omega \quad \Rightarrow \quad \omega_t = e^{tC}\omega \quad \Rightarrow \quad dI = e^{-tC}\omega.} \quad (\text{II})$$

Как и в импликации (I), здесь первая формула воспринимается как ЛОДУ. Вторая формула даёт решение этого уравнения и заодно определяет увлечение форм ω в потоке поля D . Если произвести замену $t \rightsquigarrow -t$, получим дифференциалы инвариантов I , инвариантные относительно D , см. третью формулу,

$$I = e^{-Ct}U \quad \rightsquigarrow \quad dI = e^{-tC}(dU - U' dt) = e^{-tC}\omega.$$

Примечание 4. Равенство $dI = e^{-tC}\omega$ говорит о том, что экспоненциал e^{-tC} является для системы форм ω интегрирующей матрицей. Для конечной системы форм Картана интегрирующей матрицы не существует – система не в инволюции.

Примечание 5. Выше в Примечании 3 векторное поле X оказалось φ -связанным с оператором D . В таком случае формы Картана ω определяют на многообразии M систему форм $\omega \circ T\varphi$:

$$\omega = dU - U' dt \quad \rightsquigarrow \quad \omega \circ T\varphi = dF - F' ds,$$

и при этом $\omega(D) = 0 \Rightarrow (\omega \circ T\varphi)(X) = 0$. Как в системе ω имеем последовательность производных Ли относительно оператора D , так в системе $\omega \circ T\varphi$ имеем последовательность производных Ли относительно поля⁶ X .

⁵Нас не смущает, что первая форма системы обозначена той же буквой, что вся матрица-столбец ω .

⁶Общее правило: для любого отображения φ производные Ли φ -связанных тензорных полей относительно φ -связанных векторных полей φ -связаны.

Импликация III : Инвариантный репер

Импликация II показывает, как увлекаются формы Картана ω в потоке оператора D . Следующая импликация III показывает, как увлекается вертикальный репер в потоке оператора D :

$$\left(\frac{\partial}{\partial U} \right)' = -\frac{\partial}{\partial U} C \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial U} \right)_t = \frac{\partial}{\partial U} e^{-tC} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial U} e^{tC}. \quad (\text{III})$$

Как и ранее, первая формула здесь воспринимается как ЛОДУ и вторая формула как решение этого уравнения. Что касается первой формулы, то отметим, что в любом случае существует матрица $\tilde{C}$, такая, что $\left(\frac{\partial}{\partial U} \right)' = \frac{\partial}{\partial U} \tilde{C}$. Если продифференцировать (по Ли) равенство $\omega \left(\frac{\partial}{\partial U} \right) = E$ с учётом $\omega' = C\omega$, получим:

$$\omega' \left(\frac{\partial}{\partial U} \right) + \omega \left(\left(\frac{\partial}{\partial U} \right)' \right) = 0, \quad C + \tilde{C} = 0.$$

Следовательно, $\tilde{C} = -C$, что даёт первую формулу импликации. Эту формулу получим и тогда, если производную $\left(\frac{\partial}{\partial U} \right)'$ вычислить как скобку $\left[D, \frac{\partial}{\partial U} \right]$.

Относительно третьей формулы выскажем следующее.

Во-первых, преобразование слоевых координат $U \rightsquigarrow I$ сопровождается преобразованием натурального базиса – репера и корепера:

$$I = e^{-tC} U \rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial U} e^{tC}, \quad dI = e^{-tC} \omega.$$

Замена параметра $t \rightsquigarrow -t$ во второй формуле импликации даёт репер, см. третью формулу. В расписанном виде этот репер образован вертикальными операторами

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial i_0} &= \frac{\partial}{\partial u}, \\ \frac{\partial}{\partial i_1} &= t \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u'}, \\ \frac{\partial}{\partial i_2} &= \frac{t^2}{2} \frac{\partial}{\partial u} + t \frac{\partial}{\partial u'} + \frac{\partial}{\partial u''}, \\ &\dots \quad \dots \end{aligned}$$

– инфинитезимальными симметриями оператора D . Легко проверить: $\left[D, \frac{\partial}{\partial I} \right] = 0$.

Во-вторых, в пространстве $J_{1,1}$ происходит точечное преобразование, обозначим его φ :

$$t \circ \varphi = t, \quad I \circ \varphi = U,$$

что сопровождается преобразованием полного базиса – репера и корепера⁷:

$$T_{\varphi}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial I} \right) = \left(D \quad \frac{\partial}{\partial U} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{tC} \end{pmatrix},$$

---

⁷Осторожно: часто опускают обозначение φ , что может привести к абсурдному равенству $\frac{\partial}{\partial t} = D$. Это следует иметь в виду и в импликациях (II) и (III) при записи третьих формул.

$$\begin{pmatrix} dt \\ dI \end{pmatrix} \circ T\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-tC} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dt \\ \omega \end{pmatrix}.$$

Так связывает отображение φ инвариантный базис с адаптированным, и наоборот.

Импликация IV : Поля Ли

Спрашиваем: когда вертикальное векторное поле P коммутирует с оператором D , чтобы выполнялось условие $P' = 0$? Такое векторное поле является вертикальным полем Ли.

Представим поле P в инвариантном и натуральном реперах соответствующими компонентами $\nu = PU$ и $\mu = PI$ и вычислим производную Ли P' в обоих реперах:

$$P = \frac{\partial}{\partial I} \nu = \frac{\partial}{\partial U} \mu \rightsquigarrow P' = \frac{\partial}{\partial U} (\mu' - C\mu) = \frac{\partial}{\partial I} \nu'.$$

Поле P будет полем Ли тогда и только когда, когда будет выполнено одно из эквивалентных условий: либо $\nu' = 0$, либо $\mu' = C\mu$.

Для компонент μ запишем импликацию:

$$\boxed{\mu' = C\mu \Rightarrow \mu_t = e^{tC} \mu \Rightarrow \nu = e^{-tC} \mu.} \quad (\text{IV})$$

Как и в предыдущих импликациях, здесь первая формула – ЛОДУ, вторая – решение этого уравнения, а третья, собственно, результат представления поля P в двух реперах, что подтверждается заменой $t \rightsquigarrow -t$ во второй формуле.

Импликация (IV) в принципе идентична с импликацией (I), но разница в том, что если в импликации (I) слоевые координаты U заданы а priori как элементы произвольной бесконечной струи, то в импликации (IV) величины μ являются компонентами вертикального поля Ли P . Согласно $\mu' = C\mu$, все они, начиная со второго, могут быть вычислены, как только задан первый элемент матрицы-столбца μ – т. н. *производящая функция* μ_0 ,

$$\mu_k = \mu_0^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Примечание 6. Вертикальные поля Ли $\frac{\partial}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial U} e^{tC}$, определяемые импликацией III, имеют производящие функции соответственно $1, t, \frac{t^2}{2}, \dots$

Выясним, при каких условиях и общее векторное поле P , необязательно вертикальное, является инфинитезимальной симметрией оператора D , т. е. чтобы выполнялось условие $P' \parallel D$, где знак $\parallel$ означает равенство с точностью до множителя, см. [1], стр. 137. Такое векторное поле в пространстве $J_{1,1}$ есть общее поле Ли. Представим поле P на этот раз в натуральном, адаптированном и инвариантном реперах и выпишем соотношения между соответствующими компонентами:

$$P = \xi \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial U} \lambda = \xi D + \frac{\partial}{\partial U} \mu = \xi D + \frac{\partial}{\partial I} \nu,$$

$$\xi = Pt, \quad \lambda = PU = \mu + U'\xi, \quad \mu = \omega(P), \quad \nu = PI = e^{-tC} \mu.$$

Вычислим во всех реперах производную Ли поля P относительно оператора D :

$$P' = \xi' D + \frac{\partial}{\partial U} (\lambda' - C\lambda - \xi' U') = \xi' D + \frac{\partial}{\partial U} (\mu' - C\mu) = \xi' D + \frac{\partial}{\partial I} \nu'.$$

Получаем эквивалентные условия:

$$P' \parallel D \Leftrightarrow \lambda' - C\lambda - \xi'U' = 0 \Leftrightarrow \mu' = C\mu \Leftrightarrow \nu' = 0.$$

К рассмотренным выше условиям $\mu' = C\mu$ и $\nu' = 0$ добавляется ещё условие: $\lambda' - C\lambda - \xi'U' = 0$.

Допустим, нам нужно в пространстве $J_{1,1}$ продолжить векторное поле

$$\bar{P} = \xi \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial u}$$

до полного поля Ли. Это значит, что в столбце λ известен первый элемент λ_0 . Чтобы найти остальные элементы столбца λ , воспользуемся соотношением $\lambda = \mu + U'\xi$. Первое равенство $\lambda_0 = \mu_0 + u'\xi$ даёт нам производящую функцию $\mu_0 = \lambda_0 - u'\xi$. Производные производящей функции образуют столбец μ , и после этого столбец λ определится целиком. Векторное поле $\bar{P}$ будет продолжено до поля Ли P .

Пример.

Покажем, как продолжается на плоскости xu до поля Ли оператор вращений

$$\bar{P} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Имеем соответствие $(-y, x) \rightsquigarrow (\xi, \lambda_0)$. Определяем, как обусловились, производящую функцию $\mu_0 = x + yy'$, находим производные этой функции и образуем столбец μ , а затем столбец λ :

$$\mu = \begin{pmatrix} x + yy' \\ 1 + (y')^2 + yy'' \\ 3y'y'' + yy''' \\ 3(y'')^2 + 4y'y''' + yy'''' \\ \dots \end{pmatrix},$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} x \\ 1 + (y')^2 \\ 3y'y'' \\ 3(y'')^2 + 4y'y''' \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Поле Ли записывается в координатах $(x, y, y', y'', y''', \dots)$ в виде бесконечной суммы слагаемых:

$$P = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + (1 + (y')^2) \frac{\partial}{\partial y'} + 3y'y'' \frac{\partial}{\partial y''} + \dots$$

С каждым слагаемым добавляется один новый инвариант:

$$\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \frac{y - xy'}{x + yy'}, \quad \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \dots$$

Выясняется геометрический смысл каждого инварианта: расстояние точки кривой от начала координат, тангенс угла между радиусом-вектором точки и касательным к кривой, кривизна кривой, ...

7. Разные подходы, разные определения

В главах 2 и 3 работы [20] излагаются теоретико-категорные основы высших связностей. Показана их роль при дифференциальных продолжениях. Аппарат разрабатывается в лаконичной форме и, вне сомнения, представляет ценный вклад в развитие современной геометрии.

Тем не менее, следует выделить геометрическую сторону проблемы, порой имеющую тенденцию затеряться в нагромождении абстрактных построений. Уточним эту мысль.

С одной стороны, при выводе фундаментальных объектов Г. Ф. Лаптева типа F_{ij}^α связности играют вспомогательную роль. В таком случае главное не связности, а эти объекты. С другой стороны, когда Г. Монж при изучении дифференциальных уравнений вводил для частных производных от z по x и y обозначения p, q, r, s, t , появились т. н. конусы, которые так и назывались *конусами Монжа*. Л. Е. Евтушик развивает идею горизонтальных конусов. В этом плане теория ДУ сводится, по существу, к связностям, причём более общим, чем у Эресмана, который трактует связность в расслоении как горизонтальное распределение Δ_v . По Эресману объекты Лаптева возникают естественно. Об этом говорилось выше, но что касается дифференциальных уравнений, то, на наш взгляд, особенно если речь идёт о приложениях, помимо конусов необходимо говорить о задании распределения Δ_h с некоторым произволом. Пользуясь этим произволом, горизонтальные площадки можно поворачивать подходящим образом так, чтобы распределение Δ_h стало интегрируемым. Тогда интегральные поверхности распределения Δ_h будут определять и решения ДУ. Подтвердим сказанное следующим примером.

Пример.

Л. В. Овсянников в своей диссертации изучает уравнения газовой динамики, см. также [1], стр. 87:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -u \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Разъясним геометрическую ситуацию. Как говорилось, система Пфаффа устанавливает связь между связностями и дифференциальными уравнениями:

$$\omega^\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u^\alpha}{\partial u^i} = \Gamma_i^\alpha.$$

В данном случае имеем базисные координаты (x, y) и слоевые (u, v) . Распределение Δ_h определяется четырьмя величинами Γ_i^α , но уравнения накладывают на них две связи:

$$\Gamma_1^4 = \Gamma_2^3, \quad \Gamma_2^4 = -u\Gamma_1^3.$$

Свободными остаются два параметра, положим Γ_1^3 и Γ_2^3 . Эти параметры, в свою очередь, можно фиксировать по-разному и каждый раз распределение Δ_h занимает определённое положение. Поворот нужно выбирать так, чтобы распределение Δ_h стало вполне интегрируемым, что зависит от фиксации параметров Γ_1^3 и Γ_2^3 .

Распределение Δ_h определяется базисом (X_1, X_2) , или кобазисом (ω^3, ω^4) :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_1^3 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_2^3 \frac{\partial}{\partial v}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \Gamma_2^3 \frac{\partial}{\partial u} - u\Gamma_1^3 \frac{\partial}{\partial v},$$

$$\omega^3 = du - \Gamma_1^3 dx - \Gamma_2^3 dy, \quad \omega^4 = dv - \Gamma_2^3 dx + u\Gamma_1^3 dy.$$

Рассмотрим векторное поле P с произвольными компонентами $(\xi^1, \xi^2, \lambda^3, \lambda^4)$,

$$P = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial y} + \lambda^3 \frac{\partial}{\partial u} + \lambda^4 \frac{\partial}{\partial v},$$

и потребуем, чтобы при любом выборе параметров Γ_1^3 и Γ_2^3 это поле было для распределения Δ_h инфинитезимальной симметрией, $\mathcal{L}_P \Delta_h = 0$. Получаем условие в матричной записи, см. [1] стр. 86:

$$\begin{pmatrix} X_1 \lambda^3 & X_2 \lambda^3 \\ X_1 \lambda^4 & X_2 \lambda^4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P\Gamma_1^3 & P\Gamma_2^3 \\ P\Gamma_2^3 & -P(u\Gamma_1^3) \end{pmatrix} - \\ - \begin{pmatrix} \Gamma_1^3 & \Gamma_2^3 \\ \Gamma_2^3 & -u\Gamma_1^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \xi^1 & X_2 \xi^1 \\ X_1 \xi^2 & X_2 \xi^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Из четырёх соотношений производные $P\Gamma_1^3$ и $P\Gamma_2^3$ исключаем. Остаётся два соотношения, которые должны удовлетворяться при любом выборе Γ_1^3 и Γ_2^3 :

$$\begin{cases} X_1 \lambda^4 - X_2 \lambda^3 = -\Gamma_1^3(uX_1 \xi^2 + X_2 \xi^1) + \Gamma_2^3(X_1 \xi^1 - X_2 \xi^2), \\ uX_1 \lambda^3 + X_2 \lambda^4 + \lambda^3 \Gamma_1^3 = u\Gamma_1^3(X_1 \xi^1 - X_2 \xi^2) + \Gamma_2^3(uX_1 \xi^2 + X_2 \xi^1). \end{cases}$$

Отсюда на величины $(\xi^1, \xi^2, \lambda^3, \lambda^4)$ накладывается система ДУ (частные производные относительно переменных x, y, u, v обозначены нижними индексами 1, 2, 3, 4):

$$\begin{aligned} \lambda_1^4 &= \lambda_2^3, & \lambda_2^4 &= -u\lambda_1^3, & \lambda_3^4 &= -u\lambda_4^3, & \lambda_4^4 &= \lambda_3^3 + \frac{\lambda^3}{2u}, \\ \xi_1^1 &= \xi_2^2 + \frac{\lambda^3}{2u}, & \xi_2^1 &= -u\xi_1^2, & \xi_3^1 &= -u\xi_4^2, & \xi_4^1 &= \xi_3^2. \end{aligned}$$

Система допускает общее решение в виде:

$$\begin{aligned} \xi^1 &= C_1(-xv + yu^2) + (C_2 + C_3)x + \alpha, \\ \xi^2 &= -C_1(xu + 2yv) + C_3y + \beta, \\ \lambda^3 &= 2u(C_1v + C_2), \\ \lambda^4 &= C_1(-\frac{2}{3}u^3 + \frac{3}{2}v^2) + 3C_2v + C_4, \end{aligned}$$

где (C_1, C_2, C_3, C_4) – произвольные константы и (α, β) – произвольные функции переменных u и v , удовлетворяющие уравнениям

$$\alpha_4 = -\beta_3, \quad \alpha_3 = -u\beta_4.$$

Положим $\alpha = \beta = 0$. Компоненты $(\xi^1, \xi^2, \lambda^3, \lambda^4)$, таким образом, найдены и векторное поле P представлено в виде линейной комбинации с коэффициентами (C_1, C_2, C_3, C_4) четырёх операторов – инфинитезимальных симметрий распределения Δ_h :

$$\begin{aligned} P_1 &= (-xv + yu^2) \frac{\partial}{\partial x} - (xu + 2yv) \frac{\partial}{\partial y} + 2uv \frac{\partial}{\partial u} + (-\frac{2}{3}u^3 + \frac{3}{2}v^2) \frac{\partial}{\partial v}, \\ P_2 &= x \frac{\partial}{\partial x} + 2u \frac{\partial}{\partial u} + 3v \frac{\partial}{\partial v}, \\ P_3 &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \\ P_4 &= \frac{\partial}{\partial v}. \end{aligned}$$

Важную роль играет *характеристическое поле* распределения, это – инфинитезимальная симметрия, принадлежащая распределению. Если мы знаем характеристическое поле распределения, то это позволяет нам снизить размерность распределения и упростить задачу. В данном случае размерность распределения Δ_h равна двум. Если какой-либо из найденных операторов принадлежит распределению Δ_h и если этот оператор имеет при этом инварианты, скажем, (U, V, W) , то вдоль траекторий этого оператора образуется проекция $\pi : (x, y, u, v) \rightarrow (U, V, W)$ и распределение Δ_h проектируется в пространство UVW в поле изоклин, т. е. ОДУ первого порядка, которое в принципе легко интегрируется. Если γ – некоторая интегральная кривая поля изоклин, то поверхность $\pi^{-1}(\gamma)$ над ней будет интегральным многообразием распределения Δ_h , или если ψ – первый интеграл поля изоклин, то $\psi \circ \pi$ будет первым интегралом распределения Δ_h .

Поле P будет принадлежать распределению Δ_h , когда его компоненты в адаптированном репере $\mu^\alpha = \lambda^\alpha - \Gamma_i^\alpha \xi^i$ обратятся в нуль, $\mu^\alpha = 0$. В нашем случае это условие записывается в виде:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1^3 & \Gamma_2^3 \\ \Gamma_2^3 & -u\Gamma_1^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^3 \\ \lambda^4 \end{pmatrix}.$$

При найденных $(\xi^1, \xi^2, \lambda^3, \lambda^4)$ накладываются связи на величины Γ_1^3 и Γ_2^3 .

Рассмотрим операторы P_4, P_3, P_2, P_1 по порядку.

Оператор P_4 не может быть горизонтальным, так как он вертикальный.

Оператор P_3 , для которого $(\xi^1, \xi^2, \lambda^3, \lambda^4) = (x, y, 0, 0)$, будет горизонтальным, если величины Γ_1^3 и Γ_2^3 удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} x\Gamma_1^3 + y\Gamma_2^3 = 0, \\ uy\Gamma_1^3 - x\Gamma_2^3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда два случая:

- 1) $x^2 + uy^2 \neq 0 \Rightarrow \Gamma_1^3 = \Gamma_2^3 = 0 \Rightarrow \omega^3 = du, \omega^4 = dv,$
- 2) $x^2 + uy^2 = 0 \Rightarrow P = xX_1 + yX_2.$

В случае 1 интегральные многообразия – семейство плоскостей $(u, v) = (u_0, v_0)$.

В случае 2 распределение Δ_h касается гиперповерхности $x^2 + uy^2 = 0$. Фиксируются величины Γ_i^α :

$$\Gamma_1^3 = -\frac{2x}{y^2}, \quad \Gamma_2^3 = \Gamma_1^4 = -\frac{2u}{y}, \quad \Gamma_2^4 = \frac{2ux}{y^2},$$

и записываются формы

$$\omega^3 = \frac{1}{y^2} d(x^2 + uy^2), \quad \omega^4 = dv + 2u d\left(\frac{x}{y}\right).$$

На гиперповерхности $x^2 + uy^2 = 0$ формы упрощаются:

$$\omega^3 = 0, \quad \omega^4 = d\left(v - \frac{2x^3}{3y^3}\right).$$

В качестве интегральных многообразий имеем 1-параметрическое семейство двумерных поверхностей в параметрическом задании:

$$(u, v) = \left(-\frac{x^2}{y^2}, \frac{2x^3}{3y^3} + v_0\right).$$

Оператор P_2 будет горизонтальным при условии

$$P_2 = xX_1 \Rightarrow \Gamma_1^3 = \frac{2u}{x}, \quad \Gamma_2^3 = \frac{3v}{x}.$$

Распределение Δ_h фиксируется. Найдём инварианты поля P_2 и определяем проекцию:

$$\pi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, u, v) \rightsquigarrow (U, V, W), \quad \begin{cases} U \circ \pi = y, \\ V \circ \pi = \frac{u}{x^2}, \\ W \circ \pi = \frac{v}{x^3}. \end{cases}$$

Распределение Δ_h проектируется в пространство UVW в поле изоклин, см. $T\pi X_2$:

$$T\pi X_1 = 0, \quad T\pi X_2 = \frac{\partial}{\partial U} + 3W \frac{\partial}{\partial V} - 2V^2 \frac{\partial}{\partial W}.$$

Интегральные кривые определяются системой ОДУ

$$\frac{dV}{dU} = 3W, \quad \frac{dW}{dU} = -2V^2.$$

Система решается, как обычно. Любой первый интеграл ψ определяет первый интеграл $\psi \circ \pi$ распределения Δ_h .

Оператор P_1 будет характеристическим полем распределения Δ_h вида

$$P_1 = (-xv + yu^2)X_1 - (xy + 2yv)X_2,$$

если выполняются условия:

$$\begin{cases} (xv - yu^2)\Gamma_1^3 + (xu + 2yv)\Gamma_2^3 = -2uv, \\ (xu + 2yv)\Gamma_1^3 - (xv - yu^2)u\Gamma_2^3 = -\frac{2}{3}u^3 + \frac{3}{2}v^2. \end{cases}$$

Как и в предыдущем случае, распределение Δ_h фиксируется и проектируется вдоль траекторий поля P_1 в пространство UVW в поле изоклин. Любой первый интеграл этого поля ψ определяет первый интеграл $\psi \circ \pi$ распределения Δ_h .

Вопрос может ставиться и для линейных комбинаций операторов P_1, P_2, P_3, P_4 .

Оператор $P_3 - kP_4$, где $k \in \mathbb{R}$, принадлежит распределению Δ_h и, следовательно, является характеристическим полем распределения Δ_h , если величины (Γ_1^3, Γ_2^3) фиксируются в области $x^2 + uy^2 \neq 0$ следующим образом:

$$\Gamma_1^3 = \frac{ky}{x^2 + uy^2}, \quad \Gamma_2^3 = -\frac{kx}{x^2 + uy^2}.$$

Система Пфаффа $\omega^\alpha = 0$ записывается в виде:

$$du = \frac{k}{x^2 + uy^2}(xdy - ydx), \quad dv = \frac{k}{x^2 + uy^2}(xdx + udy),$$

и с помощью инвариантов поля $P_3 - kP_4$,

$$U = u, \quad V = v + k \ln y, \quad W = \frac{x}{y},$$

преобразуется в систему ОДУ:

$$\frac{dV}{dU} = -W, \quad \frac{dW}{dU} = \frac{1}{k}(U + W^2).$$

Система решается как обычно и первые интегралы распределения Δ_h будут определены.

Таким образом, уравнения газовой динамики сводятся в структуре $\Delta_h \oplus \Delta_v$ к системе Пфаффа $\omega^\alpha = 0$, или, что равносильно, к заданию горизонтального распределения Δ_h , правда, с некоторым произволом. Произвол позволяет определять для распределения Δ_h характеристические поля. Характеристическое поле проектирует распределение Δ_h в поле изоклин и решение первоначальных уравнений с частными производными сводится к простой задаче – решению системы ОДУ первого порядка.

Этот пример вводит нас в симметричный анализ, т. е. в теорию дифференциальных уравнений, и вообще, в теорию симметрий геометрических объектов.

8. Заключение

Красота смотрится издали. Великое учение познаётся со временем. Рядом с именем Эли Картана следует называть также имя Софуса Ли и говорить надо не о двух отдельных учениях, а об едином исчислении Ли-Картана. Анри Пуанкаре называл Ньютона и Лейбница великими геометрами, которые создали дифференциальное исчисление. Хотя Пуанкаре понимал, что Лейбниц был учёным-теоретиком, в то время как Ньютон был прикладником, ведь именно Ньютону обязано человечество основами механики и законами мироздания. Такую же параллель можно провести между учениями Картана и Ли. Картану принадлежат теория внешних форм и подвижного репера, а инвариантный аппарат Ли – основа глобального анализа, и группы Ли активно содействованы во множестве прикладных наук. Теории Ли и Картана – двойственно дополняющие друг друга стороны в единой теории Ли-Картана.

Сегодня, когда мы говорим о дифференциальных продолжениях, этой сути дифференциальной геометрии, невозможно представить себе этот вопрос без форм Картана и производных Ли. Дифференциальная геометрия имеет свои внутренние проблемы, она развивается сама в себе. Пример к этому: работа Л. Е. Евтушика [20] – мощный толчок в развитии идеи об охватах и продолжениях. Есть и другая сторона медали – в дифференциальной геометрии нуждаются другие науки. Медленно, но устойчиво входят дифференциально-геометрические методы в механику непрерывной среды и теоретическую физику. Очевидно, пройдёт время, когда идеи Ли и Картана займут достойное место в механике и физике во всей своей мощи. Впрочем, если проникнуться идеями Ренэ Тома относительно сингулярностей гладких отображений, структурной устойчивости и морфогенезиса/формообразования, то легко убедиться, какую ведущую роль наряду с функциональным анализом занимает там дифференциальная геометрия. Имея в виду ещё зарождающуюся теорию о движениях и взаимодействиях полей, здесь, очевидно, не обойтись без исчисления Ли-Картана.

* * *

Список литературы

- [1] Atanasiu Gh., Balan V., Brînzei N., Rahula M., *Differential-Geometric Structures. Tangent Bundles, Connections in Fiber Bundles, Exponential Law and Jet Spaces* (in Russian), Librokom Eds., Moscow, 2010.

- [2] Atanasiu Gh., Balan V., Brînzei N., Rahula M., *Differential Geometry of Second Order. Miron-Atanasiu Theory* (in Russian), Librokom Eds., Moscow, 2010.
- [3] Bertram W., *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces over General Base Fields and Rings*, Memoirs of AMS, no. 900, 2008.
- [4] Ehresmann Ch., *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Coll. de Topologie, Bruxelles, CBRM (1950), 29-55; Œuvres Complètes, t. I, 28, 179-204.
- [5] Ehresmann Ch., *Extension du calcul des jets aux jets non holonomes*, C.R. Acad. Sci., Paris, **239** (1954), 1762-1764.
- [6] Ehresmann Ch., *Les prolongements d'un espace fibré différentiable*, Compte Rendu de l'Acad. Sci. Paris **240** (1955), 1755-1757.
- [7] Ehresmann Ch., *Catégories doubles et catégories structurées*, C.R. Acad. Sci., Paris, 256(1958), 1198-1201.
- [8] Godbillon Cl., *Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique*, Hermann, Paris, 1969.
- [9] Kolář I., Michor P. W., Slovák J.: *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer-Verlag, 1993.
- [10] Laptev G.F., *About invariant analytic theory of differentiable mappings* (in Russian), Tr. Geom. sem., VINITI, 6(1974), 37-42.
- [11] Miron R., *The Geometry of Higher Order Finsler Spaces*, Hadronic Press, USA, 1998.
- [12] Pohl W.F., *Differential geometry of higher order*, topology, 1(1962), 169-211.
- [13] Pradines J., *Suites exactes vectorielles doubles et connexions*, C.R. Acad. Sci., Paris, 278(1974), 1587-1590.
- [14] Rahula M., *New Problems in Differential Geometry*, World Scientific, 1993.
- [15] Rahula M., *Tangent structures and analutical mechanics*, Proceedings of Estonian Acad. Sci., 60(2011), 2, 98-103.
- [16] Roux A., *Jets et connexions*, Pub. Dep. math., 7(1970), n°4, 1-43.
- [17] Schouten J.A., *Über nicht-holonome Übertragungen in einer L_n* , Math. Zeitschrift, 30, S, 1929, 149-172.
- [18] White J.T., *The Method of Iterated Tangents with Applications in Local Riemannian Geometry*, Pitman Publ., 1982.
- [19] Вагнер В.В., *Теория дифференциальных объектов и основания дифференциальной геометрии*. Приложение к книге: Веблен, О., Уайтхед, Дж., *Основания Дифференциальной Геометрии*, Москва, ИЛ, 1949, стр. 135-223.
- [20] Евтушик, Л.Е., *Структуры высших порядков*. Воспоминания о профессоре Леониде Евгеньевиче Евтушике друзей, коллег и учеников, Москва: Интеллект-Центр, 2014, 424 с.

* * *

Получена в редакцию

2.1.2016